

A MOZGATOTT FELFÜGGESZTÉSŰ INGA DINAMIKAI ÉS SZÁMÍTÓGÉPES VIZSGÁLATA

DYNAMIC AND COMPUTATIONAL ANALYSIS OF A PENDULUM WITH A MOBILE SUSPENSION

Nagy Péter^{0009-0001-0269-0725 1*}

¹ Alaptudományi Tanszék, GAMF Műszaki és Informatikai Kar, Neumann János Egyetem, Magyarország,
<https://doi.org/10.47833/2025.2.ENG.013>

Kulcsszavak:

rángatott inga,
Lagrange-formalizmus,
kaotikus dinamika,
számítógépes szimuláció,
káosz jellemzők.

Keywords:

tugged pendulum,
Lagrange formalism,
chaotic dynamics,
computer simulation
chaos characteristics.

Cikktörténet:

Beérkezett 2025. július 22.
Átdolgozva 2025. december 10.
Elfogadva 2025. december 15.

Összefoglalás

Érdekes, sokféleképpen megjelenő mechanikai rendszer a mozgató felfüggesztésű inga. A mozgásegyenleteket a Lagrange-formalizmussal vezetjük le. Dinamikai szempontból a rángatott inga egy gerjesztett disszipatív rendszer és a mozgáspálya számítógépes szimulációjával látni fogjuk, hogy általános esetben kaotikus mozgás jön létre, ezen keresztül mutatjuk be a káosz jellemzőit.

Abstract

An interesting mechanical system with many different forms is the mobile suspension pendulum. The equations of motion are derived from the Lagrangian formalism. From a dynamical point of view, the twitched pendulum is an excited dissipative system and by computer simulation of the trajectory we will see that in general a chaotic motion is generated, through which the characteristics of chaos are demonstrated.

1. Bevezetés

Érdekes, sokféleképpen megjelenő mechanikai rendszer a mozgató felfüggesztésű inga. Ez olyan inga, amelynek nem rögzített a forgáspontja, hanem egy egyenes (esetleg görbe) mentén mozgatható. Ilyen ingával a gyakorlati élet számos területén találkozhatunk.



1. ábra: gyakorlati példák a rángatott felfüggesztésű ingára

Egy másik fontos és széles körben megjelenő változata a mozgató tartópontú ingának az ún. inverz inga, amely lényegében egy alul megtámasztott rúd, amelynek alátámasztási pontját

* Nagy Péter
nagy.peter@nje.hu

vízszintesen mozgatjuk, ez esetben az egyensúly fenntartásához szükséges vezérlés a lényegi gyakorlati vonatkozás.



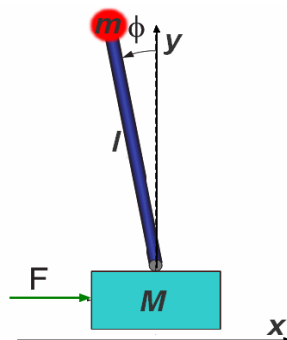
2. ábra: inverz inga példák

Dinamikai leírás szempontjából az inverz inga a bonyolultabb, így érdemes a tárgyalást ezzel kezdeni, mivel abból már a „közönséges” inga mozgásegyenletei egyszerűbb modellként megkaphatók. Az inverz inga mozgásegyenleteit a Lagrange-formalizmussal vezetjük le, melyből speciális esetként származtatjuk a vízszintesen, illetve függőlegesen periodikusan rángatott felfüggesztésű inga mozgásegyenleteit. Röviden kitérünk az inverz inga egyensúlyi vezérlésének problémájára, majd igen érdekes jelenségként a függőlegesen rángatott inga (más néven Kapitza-inga) önvezérlő egyensúlyára. Dinamikai szempontból a rángatott inga gerjesztett disszipatív rendszer és a mozgáspálya számítógépes szimulációjával látni fogjuk, hogy általános esetben igen bonyolult mozgásforma jön létre; a mozgás kaotikus. Megmutatjuk, hogy tranziens és permanens káosz is kialakulhat. A káosz jellemzőit számítógépes modellen tanulmányozzuk, megkonstruáljuk a kaotikus attraktor stroboszkopikus (Poincaré) térképét, a kezdeti feltételekre való érzékenységet fáklya-diagramon demonstráljuk, az előrejelzési idő alapján becslést adunk a Ljapunov-exponensre és szemléltetjük a kaotikus attraktor fraktál jellegét.

2. Dinamikai tárgyalás

Kezdjük a bonyolultabb rendszerrel, tehát az inverz ingával, amelyből egyszerűsítésekkel megkaphatjuk a kényszerfeltétellel mozgatott inga leírását is.

A leggyakoribb műszaki megvalósításban a súlytalannak tekinthető l hosszúságú ingarúd végére m tömegű test van erősítve, a rúd alsó vége pedig csuklósan csatlakozik az M tömegű mozgó kocsihoz (lásd a 3. ábrán). A kocsiz mozgását megfelelően választott F erővel szabályozzuk, amely ebben a formában izgalmas szabályozási probléma.



3. ábra: inverz inga modell

Kétféle úton is eljuthatunk a mozgásegyenletekhez: a jól ismert Newtoni megközelítéssel, illetve a Lagrange-formalizmusban. Jelen tanulmányban az utóbbi alapján végezzük el a tárgyalást, két okból is. Egyrészt a Lagrange-formalizmus gondolati tisztaságában és matematikai eleganciájában szinte már művészeti alkotásként tekinthető, Hamilton véleménye szerint

„tudományos költészet” („a scientific poem”). Másrészt fontos tanulság, hogy összetettebb mechanikai rendszer esetén hatékonyabb a Lagrange-féle metódus, mint a newtoni leírás.

A részletes tárgyalást a cikk jobb áttekinthetősége érdekében a Függelékben írjuk le, a 3. ábra szerinti jelöléseket használva.

Azt kapjuk, hogy az inverz inga mozgásegyenletei (a Függelék (F.2.a) és (F.2.b) képletei):

$$(M + m)\ddot{x} + m \cdot l \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - m \cdot l \cdot \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi} = F \quad (2.1.a)$$

$$m \cdot l \cdot \ddot{\varphi} - m \cdot \cos \varphi \cdot \ddot{x} - m \cdot g \cdot \sin \varphi = 0 \quad (2.1.b)$$

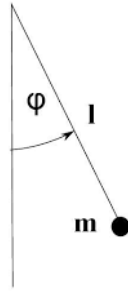
Az utóbbi egyenletben az m tömeggel egyszerűsíthetnénk, de tudatosan nem tesszük meg, hogy az egyenlet (2.1.a)-hoz hasonlóan erő mértékegységű maradjon (ennek hasznosságát később látni fogjuk).

A standard formátumra alakításhoz rendezzük ki belőlük a másodrendű deriváltakat:

$$\ddot{x} = \frac{F + mg \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi - ml \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2}{(M + m - m \cdot \cos^2 \varphi)}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{(M + m) \cdot g \cdot \sin \varphi + (F - ml \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2) \cdot \cos \varphi}{(M + m - m \cdot \cos^2 \varphi) \cdot l} \quad (2.2.)$$

A rángatott inga mozgásegyenletét már könnyen megkaphatjuk a fenti egyenletek speciális eseteként. Az irodalomban szokásos jelölések érdekében térjünk át a szögváltozó tekintetében a 3. ábrán jelölt szögről a 4. ábrán felvett szögre.



4. ábra

Használjuk a $\varphi \leftarrow \varphi + \pi$ helyettesítést, amellyel (2.1.a), illetve (2.1.b) az alábbi alakú lesz:

$$(M + m)\ddot{x} - m \cdot l \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + m \cdot l \cdot \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi} = F \quad (2.3.a)$$

$$m \cdot l \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot \cos \varphi \cdot \ddot{x} + m \cdot g \cdot \sin \varphi = 0 \quad (2.3.b)$$

Dinamikai szempontból egyszerűbb speciális eset, ha az $(x_F; y_F)$ felfüggesztési pont mozgását kényszerfeltételként szabjuk meg. Ekkor tehát $x_F(t)$ és $y_F(t)$ adott függvények (míg $M = 0$ és $F = 0$).

Vízszintes egyenesen periodikusan rángatott inga esetén $x_F(t) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$, $y_F(t) = 0$,

ami könnyen visszavezethető az inverz inga tárgyalására, hiszen (F.1.) képletekben látható, hogy az x koordináta a kocsik koordinátája, tehát az inga forgáspontjának koordinátája

$$x(t) = x_M(t) = x_F(t) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right).$$

Kényszerfeltétel esetén (2.3.a) mozgásegyenlet eliminálható, hiszen a felfüggesztési pont mozgása a kényszer miatt előírt időfüggésű, tehát csak a második mozgásegyenlet marad:

$$m \cdot l \cdot \ddot{\varphi} - m \cdot \cos \varphi \cdot A \cdot \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} t \right) + m \cdot g \cdot \sin \varphi = 0$$

ahol felhasználtuk, hogy:

$$\ddot{x} = -A \cdot \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} t \right)$$

A realiztikus leírás érdekében illesszünk be a mozgásegyenletbe a sebességgel arányos, mozgást akadályozó („súrlódási”) $F_s = c \cdot v = c \cdot (l\dot{\varphi})$ erőtagot (e lépésben hasznos, hogy az egyenlet erő mértékegységű!):

$$m \cdot l \cdot \ddot{\varphi} - m \cdot \cos \varphi \cdot A \cdot \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} t \right) + m \cdot g \cdot \sin \varphi + c \cdot (l\dot{\varphi}) = 0$$

A szöggyorsulásra rendezve a vízszintesen periodikusan rángatott inga mozgásegyenlete:

$$\ddot{\varphi} = \frac{A}{l} \cdot \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} t \right) \cdot \cos \varphi - \frac{g}{l} \cdot \sin \varphi - \frac{c}{m} \cdot \dot{\varphi} \quad (2.4.)$$

Függőleges egyenesen periodikusan rángatott inga esetén $x_F(t) = 0$, $y_F(t) = A \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} t \right)$.

Ekkor sajnos nem használhatjuk közvetlenül az inverz ingára kapott eredményeket, mivel ott a felfüggesztési pont vízszintesen mozgott, itt pedig függőlegesen, tehát (F.1) helyett most:

$$\begin{cases} x_M = 0 \\ y_M = A \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} t \right) \\ x_m = -l \cdot \sin \varphi \\ y_m = A \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} t \right) + l \cdot \cos \varphi \end{cases}$$

Ismét végig kell hát vezetni a Függelékben megismert Lagrange-formalizmust, melyet nem részletezünk, végül a *függőlegesen periodikusan rángatott inga mozgásegyenlete*:

$$\ddot{\varphi} = \frac{g}{l} \cdot \sin \varphi - \frac{A}{l} \cdot \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} t \right) \cdot \sin \varphi - \frac{c}{m} \cdot \dot{\varphi} \quad (2.5.)$$

A (2.2), a (2.4), illetve a (2.5) mozgásegyenletekkel megkaptuk az inverz inga, a vízszintesen periodikusan rángatott inga, illetve a függőlegesen periodikusan rángatott inga matematikai modelljét, az alábbiakban ezek alapján vizsgálhatjuk őket.

3. Az inverz inga vezérlése

Az inverz inga vezérlésre csak áttekintő módon térünk ki, mivel nem ez a fő gondolati irányunk és az irodalomban széleskörűen tárgyalt, lásd például [1].

A Lagrange-formalizmusban a leíráshoz bevezettük a $q_1 = x$ és $q_2 = \varphi$ általános koordinátákat. Az inverz inga (2.2.) mozgásegyenletei másodrendű differenciálegyenletek, amelyek a $q_3 = v = \dot{x}$ sebesség és az $q_4 = \omega = \dot{\varphi}$ szögsebesség változók bevezetésével elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerre alakíthatók:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{\varphi} &= \omega \\ \dot{v} &= \frac{F + mg \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi - ml \cdot \sin \varphi \cdot \omega^2}{(M + m - m \cdot \cos^2 \varphi)} \\ \dot{\omega} &= \frac{(M + m) \cdot g \cdot \sin \varphi + (F - ml \cdot \sin \varphi \cdot \omega^2) \cdot \cos \varphi}{(M + m - m \cdot \cos^2 \varphi) \cdot l} \end{aligned} \right\}.$$

A kapott elsőrendű differenciálegyenlet-rendszert írjuk át a $\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix}$ változókat (általános

koordinátákat és általános sebességeket) használva:

$$\dot{\vec{q}} = \vec{f}(\vec{q}), \quad (3.1.a)$$

ahol:

$$\dot{\vec{q}} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{pmatrix} \text{ és } \vec{f}(\vec{q}) = \begin{pmatrix} f_1(q_1, q_2, q_3, q_4) = q_3 \\ f_2(q_1, q_2, q_3, q_4) = q_4 \\ f_3(q_1, q_2, q_3, q_4) = \frac{F + mg \cdot \sin q_2 \cdot \cos q_2 - ml \cdot \sin q_2 \cdot q_4^2}{(M + m - m \cdot \cos^2 q_2)} \\ f_4(q_1, q_2, q_3, q_4) = \frac{F \cdot \cos q_2 + (M + m) \cdot g \cdot \sin q_2 - ml \cdot q_4^2 \cdot \sin q_2 \cdot \cos q_2}{(M + m - m \cdot \cos^2 q_2) \cdot l} \end{pmatrix}.$$

A realiztikus leírás érdekében illesszünk be itt is a kocs sebességével arányos, mozgást akadályozó („súrlódási”) $F_s = -c \cdot v = -c \cdot \dot{x} = -cq_3$ erőtagot a gyorsulásokat megadó f_3 és f_4 képletbe (e lépésben fontos, hogy mindkét képlet számlálójába erő mértékegységű!), tehát az $F \leftarrow (F - c \cdot q_3)$ helyettesítéssel:

$$\dot{\vec{q}} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{pmatrix} \text{ és } \vec{f}(\vec{q}) = \begin{pmatrix} f_1(q_1, q_2, q_3, q_4) = q_3 \\ f_2(q_1, q_2, q_3, q_4) = q_4 \\ f_3(q_1, q_2, q_3, q_4) = \frac{(F - c \cdot q_3) + mg \cdot \sin q_2 \cdot \cos q_2 - ml \cdot \sin q_2 \cdot q_4^2}{(M + m - m \cdot \cos^2 q_2)} \\ f_4(q_1, q_2, q_3, q_4) = \frac{(F - c \cdot q_3) \cdot \cos q_2 + (M + m) \cdot g \cdot \sin q_2 - ml \cdot q_4^2 \cdot \sin q_2 \cdot \cos q_2}{(M + m - m \cdot \cos^2 q_2) \cdot l} \end{pmatrix} \quad (3.1.b)$$

Az inverz inga felső egyensúlyi helyzetben tartásának vezérléséhez linearizáljuk a fenti mozgásegyenleteket a $\vec{q}_{fe}$ felső egyensúlyi helyzet körül:

$$\vec{q}_{fe} = \begin{pmatrix} x_e \\ 2n\pi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ ahol } x_e \text{ tetszőleges valós és } n \text{ tetszőleges egész szám,}$$

tehát:

$$\frac{d\Delta\vec{q}}{dt} = \overline{Df}\bigg|_{\vec{q}_{fe}} \cdot \Delta\vec{q}, \quad (3.2)$$

ahol $\Delta\vec{q} = \vec{q} - \vec{q}_{fe}$ és $\overline{Df}\big|_{\vec{q}_{fe}}$ az $\vec{f}(\vec{q})$ vezérlőfüggvény-vektor Jacobi-mátrixa a $\vec{q}_{fe}$ felső egyensúlyi állapot értéknél, azaz:

$$\overline{Df}\bigg|_{\vec{q}_{fe}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1}\bigg|_{\vec{q}_{fe}} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2}\bigg|_{\vec{q}_{fe}} & \frac{\partial f_1}{\partial q_3}\bigg|_{\vec{q}_{fe}} & \frac{\partial f_1}{\partial q_4}\bigg|_{\vec{q}_{fe}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1}\bigg|_{\vec{q}_{fe}} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2}\bigg|_{\vec{q}_{fe}} & \frac{\partial f_2}{\partial q_3}\bigg|_{\vec{q}_{fe}} & \frac{\partial f_2}{\partial q_4}\bigg|_{\vec{q}_{fe}} \\ \frac{\partial f_3}{\partial q_1}\bigg|_{\vec{q}_{fe}} & \frac{\partial f_3}{\partial q_2}\bigg|_{\vec{q}_{fe}} & \frac{\partial f_3}{\partial q_3}\bigg|_{\vec{q}_{fe}} & \frac{\partial f_3}{\partial q_4}\bigg|_{\vec{q}_{fe}} \\ \frac{\partial f_4}{\partial q_1}\bigg|_{\vec{q}_{fe}} & \frac{\partial f_4}{\partial q_2}\bigg|_{\vec{q}_{fe}} & \frac{\partial f_4}{\partial q_3}\bigg|_{\vec{q}_{fe}} & \frac{\partial f_4}{\partial q_4}\bigg|_{\vec{q}_{fe}} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

A vezérlés tehát az F erőn keresztül történik, amelyet a gyakorlati megvalósításokban az alábbi alakban szoktak felvenni:

$$F(t) = \alpha \cdot \vec{k} \cdot \vec{q} - \beta \cdot q_3,$$

ahol az első tag hordozza a pillanatnyi $\vec{q}$ állapottól függő (lineáris) visszacsatolást, a második tag a sebességtől függő ellenállási tagot. A $\vec{k}$ csatolási vektor a (3.2) és (3.3) formula alapján optimalizálható (a (3.3) mátrix konkrét kiszámítása igen fáradtságos munka), míg az α és β konstans empirikus tapasztalat alapján lehet becsülni. Az inga konkrét megvalósítása látható például a [2] videón.

4. Függőlegesen rángatott inga

Tárgyalásunkat a függőlegesen periodikusan rángatott ingával (Kapitza-inga néven is ismert) folytatjuk, mert amint látni fogjuk kapcsolódik az inverz inga felső egyensúlyi helyzetben tartásához. (2.5) formula megadja a mozgásegyenletet:

$$\ddot{\varphi} = \frac{g}{l} \cdot \sin \varphi - \frac{A}{l} \cdot \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} t \right) \cdot \sin \varphi - \frac{c}{m} \cdot \dot{\varphi} \quad (4.1)$$

A Függelék B. részében beszélünk a dimenziótlantítás jelentőségéről és metódusáról. Jelen modellben a rángatás T periódus-idejének felhasználásával a $t \leftarrow t \cdot T$ helyettesítéssel áttérhetünk dimenziótlant t időváltozóra, amellyel (4.1.) a következő alakú lesz (az idő szerinti deriváltakban is el kell végezni a helyettesítést!):

$$\ddot{\varphi} = G \cdot \sin \varphi - R \cdot \sin(2\pi t) \cdot \sin \varphi - C \cdot \dot{\varphi}, \quad (4.2)$$

amelyben:

$$R = (2\pi)^2 \frac{A}{l}, \quad G = \frac{gT^2}{l} \quad \text{és} \quad C = \frac{cT}{m} \quad (4.3.)$$

dimenziótlant konstansok.

Vegyük észre, hogy a rángatott ingát jellemző „eredeti” 6 (l, m, g, c, A, T) mértékegységes paraméter helyett csupán az ezekből előálló 3 (R, G, T) mértékegység nélküli paraméter marad. Ez praktikus azt jelenti, hogy *minden olyan inga, amely bár az „eredeti” paramétereiben különbözik, de a három dimenziótlan paramétere azonos, dinamikai szempontból tökéletesen azonos viselkedést mutat.*

A dimenziótlan mozgásegyenlet numerikus szimuláció szempontjából is kedvező, hiszen a számítógép csak számokkal tud dolgozni, mértékegységekkel nem. A megvalósított szimulációs program (lásd pl. [3]) meglepő jelenséget mutat: *bizonyos paraméterértékek mellett az inga „magától”, tehát szabályzó visszacsatolás nélkül is megmarad a felső instabil egyensúlyi állapotban.* A dinamikus egyensúlyi feltétele:

$$\frac{3 \cdot (2\pi)^2}{4} \cdot \frac{A^2}{l \cdot g \cdot T^2} = \frac{3}{4 \cdot (2\pi)^2} \cdot \frac{R^2}{G} > 1 \quad (4.4)$$

A szimulációs programmal igazán jól el lehet kísérletezni. Gyakorlatilag megvalósított, például Lego Technic segítségével épített Kapitza-inga nézhető a [4] videón.

5. Vízszintesen rángatott inga kaotikus tulajdonságainak számítógépes vizsgálata

Már levezettük a (2.4.) formulával adott mozgásegyenletet:

$$\ddot{\varphi} = \frac{A}{l} \cdot \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} t \right) \cdot \cos \varphi - \frac{g}{l} \cdot \sin \varphi - \frac{c}{m} \cdot \dot{\varphi} \quad (5.1.)$$

Az előző fejezetben tárgyalt dimenziótlanítással ezúttal kapjuk, hogy:

$$\ddot{\varphi} = R \cdot \sin(2\pi t) \cdot \cos \varphi - G \cdot \sin \varphi - C \cdot \dot{\varphi}, \quad (5.2.)$$

amelyben a már bevezetett:

$$R = (2\pi)^2 \frac{A}{l}, \quad G = \frac{gT^2}{l} \quad \text{és} \quad C = \frac{cT}{m} \quad (5.3.)$$

dimenziótlan konstansok.

Bevezetve $\omega = \dot{\varphi}$ szögsebesség változót, (5.2.)-t elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerre alakítjuk:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega \\ \dot{\omega} &= R \cdot \sin(2\pi t) \cdot \cos \varphi - G \cdot \sin \varphi - C \cdot \omega \end{aligned} \right\} \quad (5.4.)$$

A fenti (csatolt) nemlineáris differenciálegyenlet-rendszert nem lehet „kézzel” analitikusan megoldani, tehát numerikus módszerekkel, számítógép segítségével végezzük a vizsgálatokat, ezért a káoszelmélet a számítógépes kísérleti fizika egyik legfontosabb területe. Ez azonban alapvetően programozói kompetenciákat tételez fel, ami sokak számára nem kis kihívás. Éppen ezért tartjuk nagyon kiemelendőnek és ajánljuk oktatási és kutatási célra egyaránt a *Dynamics Solver* programot, amely szabadon letölthető és tetszőleges dinamikai rendszerek szimulációjára alkalmas, roppant felhasználóbarát és nem szükséges programozói tudás a használatához. Azon Olvasók számára, akik az alább bemutatott szimulációkat saját maguk ki szeretnék próbálni, ajánljuk az [5] linken letölthető (ZIP fájlba csomagolt) bemutató anyagot, amely az ELTE Doktori Iskolája számára készült (a *kaosz_num_DS_elektronikus_tananyag_NP\DS\ds\vr198-64.exe* fájlal telepíthető a Dynamics Solver program). A továbbiakban a Dynamics Solver (DS) programmal dolgozunk. Egy már kész **.ds probléma-fájl* legalapvetőbb szintű használatához szükséges funkciók: a futtatás a  ikonnal, a megállítás a  ikonnal, a folytatás a  ikonnal, a grafikus ablakok

törlése (akár futás közben is!) a  ikonnal, a paraméter-tábla megjelenítése a  ikonnal, a kezdetifeltétel-tábla megjelenítése pedig a  ikonnal történik.

A DS-ben megírt szimulációs program tipikus pályája látható az 5. ábrán.

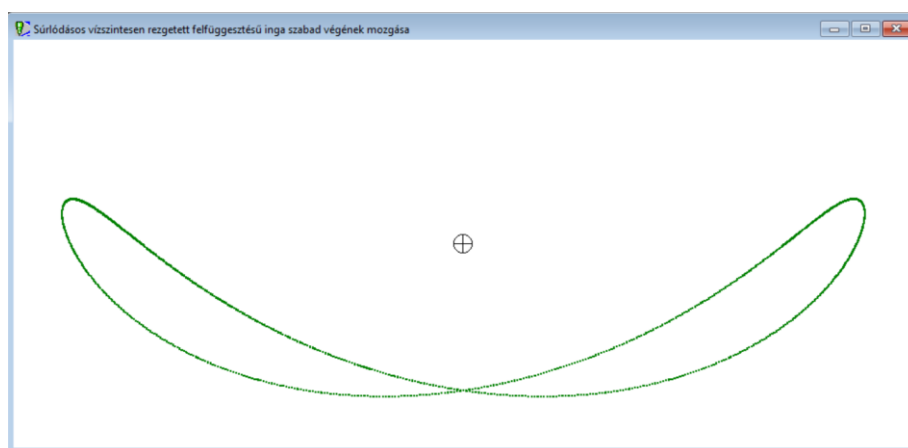


5. ábra: a súrlódásos vízszintesen periodikusan rángatott inga végpontjának kaotikus pályája

Az 5. ábrán látható esetben a kaotikus mozgás végtelen ideig fent marad, ez a *permanens káosz* jelensége. Más paraméter értékek esetén, azonban a kaotikus mozgás csak véges ideig történik, bizonyos idő után a mozgás reguláris (pl. periodikus) lesz, ez a *tranzienst káosz* jelensége (lásd pl. 6. ábrákon).



6.a. ábra: kaotikus pálya $t = 40 \cdot T$ ideig



6.b. ábra: periodikus pálya $t = 40 \cdot T$ idő után

A káosz egyszerű (kis szabadsági fokú), egyértelmű (determinisztikus) törvényszerűségekkel (azaz néhány nemlineáris dinamikai egyenlettel) leírható rendszerek időbeli változása (mozgása), lényegi vonásai az alábbiakban foglalhatók össze:

1. szabálytalan (nem-periodikus, bonyolult) viselkedés,
2. a kiindulási állapot hibájának rohamos növekedése (a kezdeti feltételekre való extrém érzékenység) következtében a gyakorlatban hosszú időtartamra előrejelezhetetlen, csak valószínűségi leírás adható,
3. az időbeli változást teljesen megadó fázistérben a hosszú távú viselkedést egyfajta struktúra, rend jellemezi, a fázistérbeli kép (leképezés) fraktálgeometriát mutat.

Valamely dinamikai rendszer egy időpillanatbeli állapotának egyértelmű megadásához szükséges a (minimális számú) $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ változó által kifeszített n dimenziós absztrakt fázistér. A rendszer időfejlődését változóinak $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ elsőrendű differenciálegyenlet rendszerével adjuk meg:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (5.5)$$

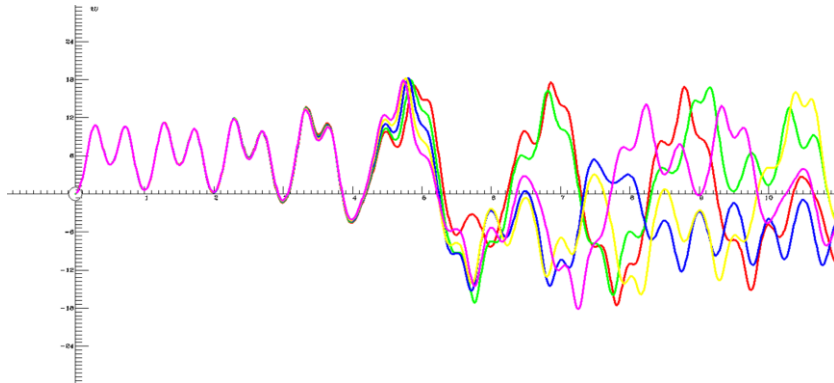
A rendszer állapotát bármely pillanatban a fázistér egy pontja reprezentálja, a rendszer időfejlődése során a fázispont által bejárt görbe neve *trajektória*.

Jelen modellben bevezetve a $\Theta = 2\pi t$ fázisváltozót (5.4.) a mozgásegyenleteket (5.5.) standard alakú elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerre alakítjuk:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega \\ \dot{\omega} &= R \cdot \sin(\Theta) \cdot \cos \varphi - G \cdot \sin \varphi - C \cdot \omega \\ \dot{\Theta} &= 2\pi \end{aligned} \right\} \quad (5.6.)$$

Tehát a modell fázistere 3 dimenziós (három dimenzió alatt nem is lehetséges káosz), a káosz fenti lényegi vonásainak 1. pontja pedig az 5. és 6. ábrákon szemléletesen tetten érhető.

A DS segítségével egyszerűen tanulmányozhatjuk a káosz 2. lényegi vonását is, a kaotikus rendszer időbeli viselkedésének a kezdeti feltételekre mutatott extrém érzékenységét. Ez azt jelenti, hogy a rendszert (ugyanazon paraméter értékek mellett) nagyon közeli kezdőfeltételekből indítva, nagyon eltérő időfüggést tapasztalunk, azaz távolról sem teljesül az általában megszokott „kis kezdeti hiba, kis eredménybeli eltérés” elv. Az extrém érzékenység legszemléletesebb illusztrálási módja az. ún. *fáklya-diagram* készítése.



7. ábra: szögsebesség-idő fáklyadiagram

A fáklya-diagramon a kaotikus rendszer valamely változójának időbeli változását ábrázoljuk, több, egymáshoz nagyon közeli kezdőfeltételből indítva. A 7. ábrán szemléltethetjük az $\omega(t)$ szögsebesség időfüggvényét 5 különböző, nagyon közeli φ_0 kezdeti kitérésszög érték mellett (a rendszer többi változójának kezdeti értéke minden indításnál azonos). Jól látható, hogy a szögsebesség időbeli változását megadó görbék egy ideig együtt futnak, majd teljesen szétválnak, azaz bizonyos *karakterisztikus időtartam (más néven előrejelzési idő)* után a nagyon kicsiny kezdőértékbeli eltérések teljesen eltérő viselkedéshez vezetnek.

Az (5.5.) mozgásegyenletekkel adott rendszer $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ fázispontbeli $\bar{\delta x} = (\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n)$ perturbációjának időváltozása:

$$\frac{d(\bar{\delta x}(t))}{dt} = \overline{\overline{Df}} \cdot \bar{\delta x}(t),$$

ahol $\overline{\overline{Df}}$ a már korábban megismert Jacobi-mátrix:

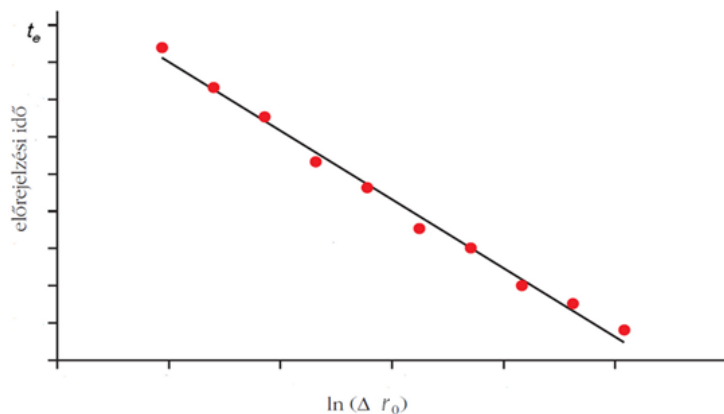
$$\overline{\overline{Df}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

A pályák távolságát megadó $\Delta r(t) = \sqrt{\delta x_1^2(t) + \delta x_2^2(t) + \dots + \delta x_n^2(t)}$ metrika időfüggése:

$$\Delta r(t) = \Delta r_0 \cdot e^{\lambda(r)t},$$

ahol Δr_0 a kezdőfeltétel távolság, $\lambda(r)$ pedig a lokális Ljapunov-exponens, ami függ a kezdőfeltétel választásától. A lokális Ljapunov-exponensek átlaga a λ Ljapunov-exponens, ami a közeli kezdőpontok tipikus távolodási rátáját írja le. Kaotikus rendszerekben a Ljapunov-exponens pozitív, tehát exponenciális a pályák távolodása. (Ha a rendszer nem kaotikus, akkor általában a távolodás exponenciálisnál lassabb, vagyis a Ljapunov-exponens nem pozitív.) Annyi Ljapunov-exponens létezik, ahány változóval leírható a rendszer, vagyis ahány dimenziós a fázistér. A kezdőfeltételekre való érzékenységet a legnagyobb Ljapunov-exponens határozza meg.

A Ljapunov-exponens numerikus meghatározásának egyik lehetősége az előrejelzési idő becslésére alapul.

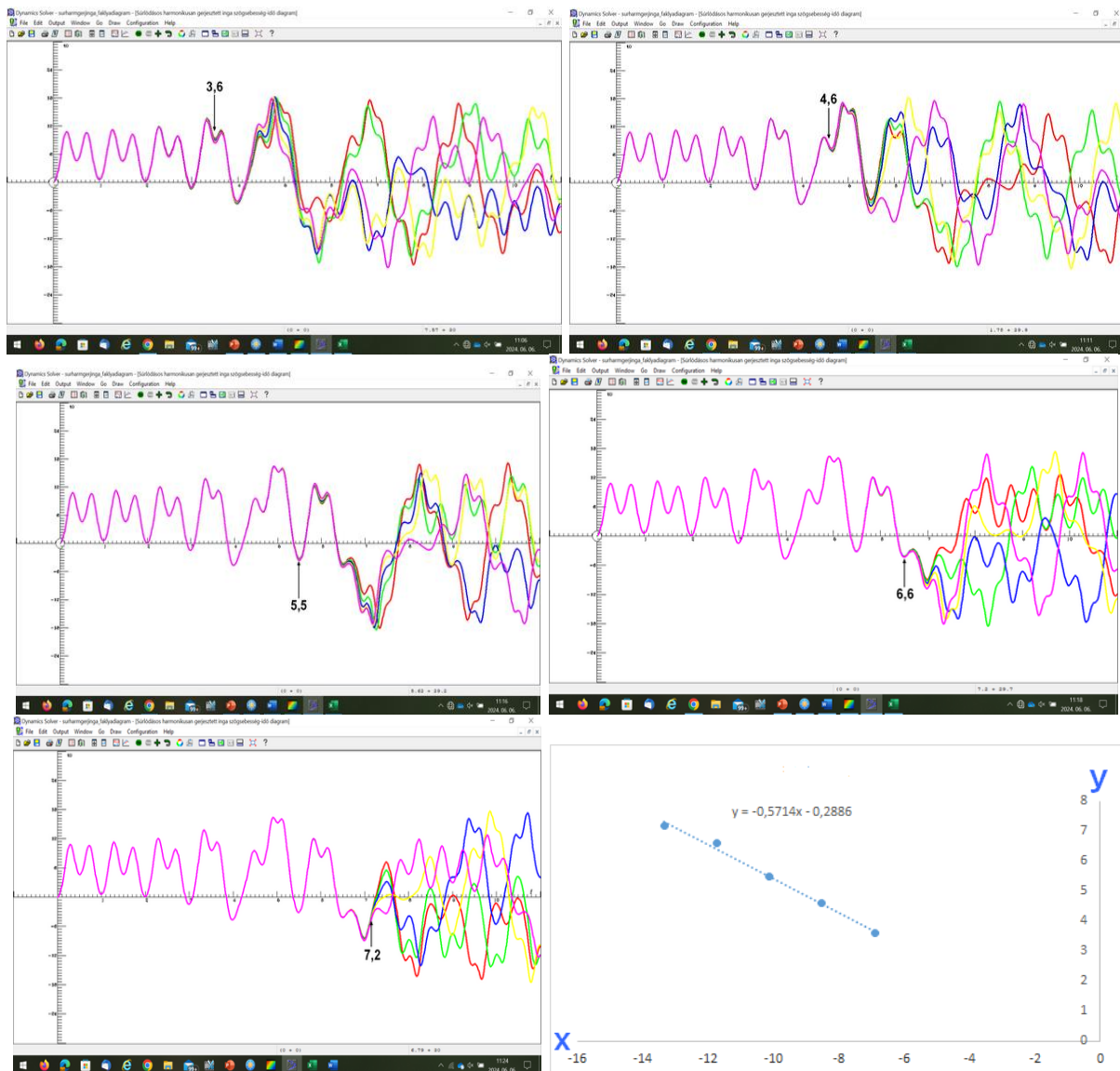


8. ábra: a Ljapunov-exponens meghatározása előrejelzési idő becslés alapján

A Δr_0 kezdeti távolság és a t_e előrejelzési idő közötti összefüggés:

$$t_e = -\frac{1}{\lambda} \ln(\Delta r_0) - t_0 \quad (5.7.)$$

A módszer tehát: elkészítjük a fáklyadiagramokat különböző Δr_0 kezdeti távolságok mellett, a diagramokon becsüljük a t_e előrejelzési időket, majd ábrázoljuk az összetartozó $(\ln \Delta r_0 ; t_e)$ értékpárokat, amelyek (5.7.) szerint (közelítőleg) egy egyenesre esnek és az illesztett egyenes meredekségének reciprokának mínusz egyszerese adja a Ljapunov-exponenst.



9. ábra: a periodikusan rángatott inga Ljapunov-exponensének becslése előrejelzési idő alapján

A 9. ábrán konkrét becslést mutatunk be: 5 ($i=0,1,...,4$) egymástól nagyon kicsiny ($\Delta \varphi_{0i} = 2 \cdot 10^{-4} / 5^i$) kezdőszög eltéréssel indított szög-idő függést ábrázoló fáklyadiagramot rajzoltunk meg, mindegyiken bejelölve a becsült t_{ei} előrejelzési időt. Ábrázolva az összetartozó $(\ln \Delta \varphi_{0i} ; t_{ei})$ értékpárokat, majd a pontokra legkisebb négyzetek módszerével egyenest illesztve az egyenes meredeksége $-0,57$ értékűnek adódik, így a Ljapunov-exponens $1,75$.

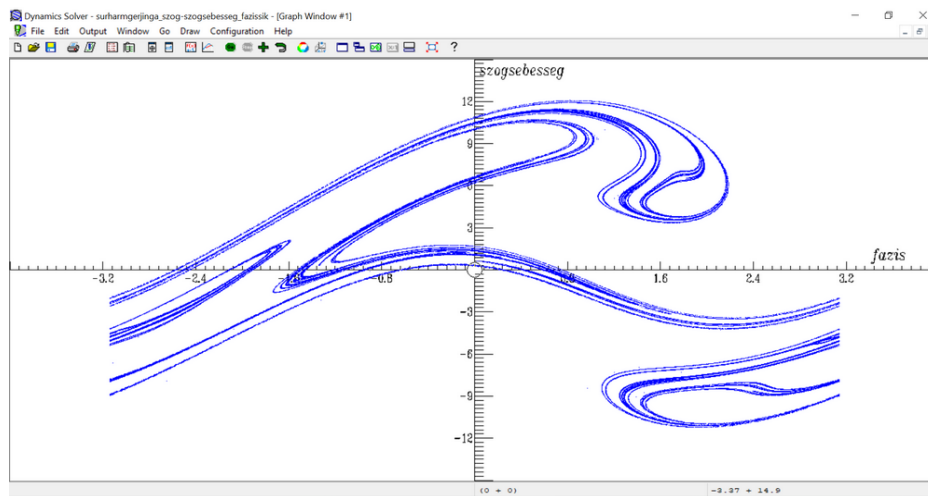
A fázistér vonzó halmazát, amely felé a trajektóriák hosszú időtávlatban közelednek *attraktornak* nevezzük:

- egyszerű attraktor: szabályos (reguláris) mozgásokhoz tartozó attraktorok, fixpont attraktor, vagy határciklus attraktor,
- különös (kaotikus) attraktor: szabálytalan (kaotikus) mozgást végző rendszer *fraktál* geometriájú attraktora.

Permanens káosz esetén a rendszer fázispontja soha nem hagyja el az attraktort, míg *transziens* káosznál a trajektória csak véges ideig marad a kaotikus attraktor közelében.

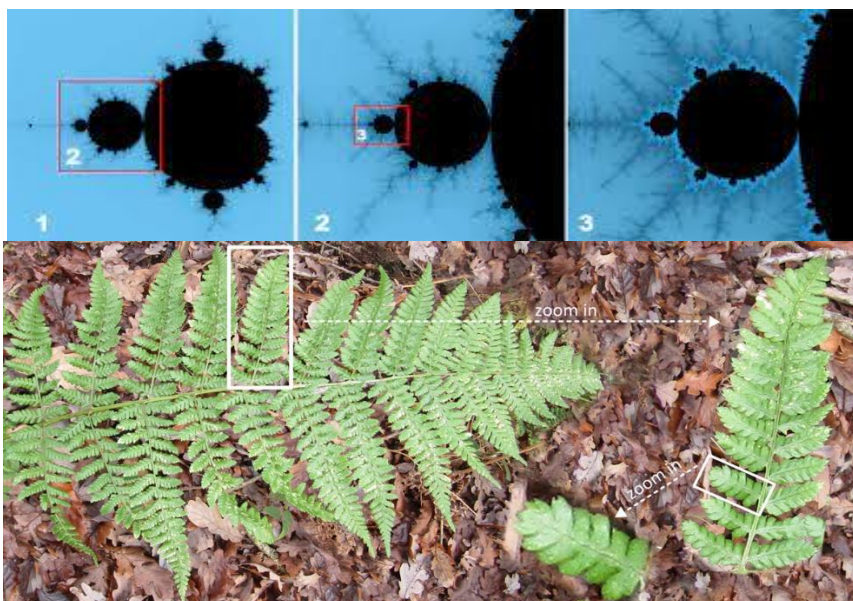
Poincaré térkép (-leképezés): a trajektóriának csak egy kiválasztott felületet átdőfő (adott altérbe eső) metszéspontjait ábrázoljuk, melyek diszkrét pontsorozatot alkotnak. A gerjesztett rendszerek esetén használt ún. *stroboszkópikus* leképezés speciális Poincaré-leképezés, amely a trajektória gerjesztési periódusidőnként (azaz állandó fázisértékeknél) vett mintájaként kapott pontsorozat.

A 10. ábrán a vízszintesen rángatott súrlódásos inga stroboszkópikus leképezése látható az $R = 33,55$, $G = 9,81$ és $C = 1$ paraméterek mellett.



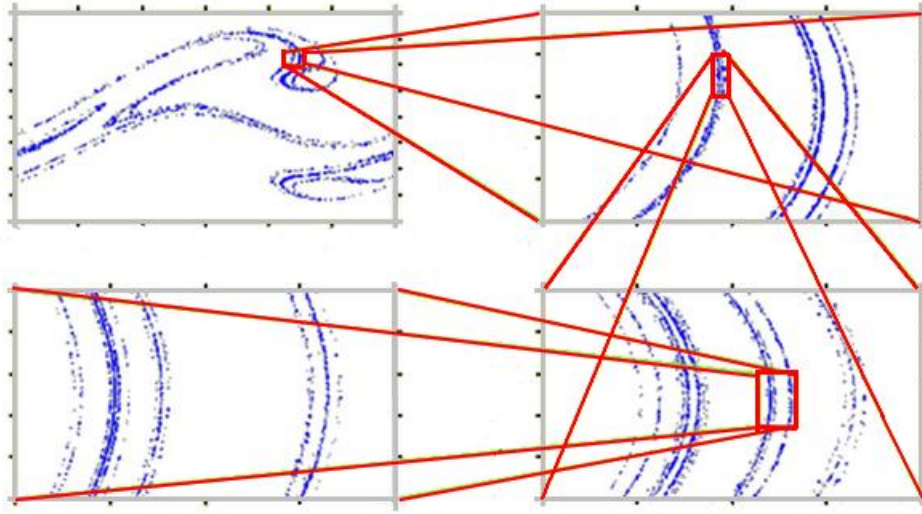
10. ábra: a rángatott inga stroboszkópikus leképezése a szög-szögsebesség fázissíkban

Ezen keresztül jól szemléltethetjük a fentebb felsorolt káoszjellemzők 3. vonását, vagyis a hosszú távú viselkedést megjelenítő fázistérbeli attraktor fraktálgeometriáját. A fraktálok egyik lényegi vonása az ön hasonlóság azaz, hogy felnagyítva egy részletüket az eredetivel azonos struktúra jelenik meg.



11. ábra: fraktálok ön hasonlósága (skálainvariáns) jellege

A szimulációt a 10. ábra paraméterértékei mellett futtatva a 11. ábrán látható kinagyítás sorozatot elvégezve nagyon szépen szemlélhető az önhasznósági jelleg: a kaotikus attraktor ún. Cantor-szál típusú fraktálgeometriája.



12. ábra: a kaotikus attraktor fraktálgeometriájának önhasznósági jellege

6. Következtetések

Jelen cikk összefoglaló jellegű: egy érdekes, a gyakorlatban igen sokrétűen megjelenő mechanikai rendszernek, a mozgatott felfüggesztésű ingának tárgyalását tekinti át. Egyfelől didaktikusan bemutatja az ilyen típusú rendszerek dinamikai leírását (Lagrange-formalizmusban), másfelől a kapott mozgásegyenletekkel leírható modellek vizsgálatát saját számítógépes szimulációk alapján. Ezen szimulációkra támaszkodva szemléletes áttekintő képet ad a kaotikus rendszerek lényegi sajátosságairól.

Függelék

A. Az inverz inga mozgásegyenleteinek levezetése Lagrange-formalizmusban

Az alábbiakban a 3. ábra jelöléseit használjuk.

A mozgásegyenletek levezetése az:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

Euler-Lagrange egyenletek alapján történik (lásd pl. [6], [7], [8]), ahol $L = T - V$ a rendszer Lagrange-függvénye, q_i az i -ik általános koordináta, Q_i az általánosított erő i -ik komponense. Az egyenlet pontos jelentését az inga mozgásegyenleteinek tárgyalása során részletesen elemezzük. Az inverz inga mozgása két-dimenziós (függőleges síkban történik), tehát $D = 2$. Az inga két tömegpontból (pontoszerűnek tekinthető anyagi objektumból) áll: az M tömegű „kocsi” és az m tömegű „nehezék” alkotja. Tehát $N = 2$.

Ennek alapján Descartes-koordináta rendszerben $2 \times 2 = 4$ koordinátára van szükség: az M tömegű „kocsi” helyét megadó x_M és y_M koordinátákra, illetve az m tömegű „nehezék” helyét megadó x_m és y_m koordinátákra.

A mozgásra kényszerfeltételek vonatkoznak, azaz előírások a koordinátákra.

Egyrészt a kocsi az x -tengelyen mozog, tehát az y koordinátája mindig nulla, tehát az első feltételi egyenlet:

$$f^{(1)} = y_M = 0$$

Másrészt kocsi és a nehezék távolsága mindig l , tehát a Pitagorasz-tétel szerint (nullára rendezve):

$$f^{(2)} = (x_m - x_M)^2 + y_m^2 - l^2 = 0$$

Tehát $s = 2$ a kényszerfeltételek száma.

Ezek alapján már meghatározható a rendszer szabadsági fokainak a száma:

$$f = N \cdot D - s = 2 \cdot 2 - 2 = 2$$

Tehát elegendő csak 2 megfelelően választott általános koordináta a 4 Descartes-koordináta helyett.

Szembeötlő, hogy jelen esetben érdemes a kocsi $x = x_M$ koordinátáját és a rúd függőlegessel bezárt φ szögét választani, hiszen ez a két adat mindkét test helyét egyértelműen definiálja.

Legyenek tehát $q_1 = x$ és $q_2 = \varphi$ a választott általános koordináták.

Fejezzük ki ezekkel a „eredeti” Descartes-koordinátákat:

$$\begin{cases} x_M = x \\ y_M = 0 \\ x_m = x - l \cdot \sin \varphi \\ y_m = l \cdot \cos \varphi \end{cases} \quad (\text{F.1.})$$

Lényeges, hogy az általános koordináták megfelelő választásával a feltételi függvények azonossággá alakulnak, így eliminálódnak a tárgyalásból.

Például:

$$\begin{aligned} f^{(2)} &= (x_m - x_M)^2 + y_m^2 - l^2 = (x - l \cdot \sin \varphi - x)^2 + (l \cdot \cos \varphi)^2 - l^2 = \\ &= l^2 \cdot \sin^2 \varphi + l^2 \cdot \cos^2 \varphi - l^2 = l^2 \cdot (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) - l^2 \equiv 0 \end{aligned}$$

A kinetikus (mozgási) energia:

$$T = \frac{1}{2} M \cdot v_M^2 + \frac{1}{2} m \cdot v_m^2$$

A v_M és v_m sebességekre Descartes-koordináta rendszerben a Pitagorasz-tétel szerint fennáll, hogy:

$$v_M^2 = v_{Mx}^2 + v_{My}^2 = \dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2, \text{ illetve } v_m^2 = v_{mx}^2 + v_{my}^2 = \dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2.$$

Használjuk az (*) összefüggéseket és végezzük el a deriválásokat, azt kapjuk hogy:

$$v_M^2 = \dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2 = \dot{x}^2 + \dot{0}^2 = \dot{x}^2,$$

illetve

$$\begin{aligned} v_m^2 &= \dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2 = \left(\frac{d}{dt} (x - l \cdot \sin \varphi) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} (l \cdot \cos \varphi) \right)^2 = (\dot{x} - l \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\varphi})^2 + (-l \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi})^2 = \\ &= \dot{x}^2 - 2l \cdot \cos \varphi \cdot \dot{x} \cdot \dot{\varphi} + l^2 \cdot \dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

Így a mozgási energia immáron az általános koordinátákkal:

$$T = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 - m \cdot l \cdot \cos \varphi \cdot \dot{x} \cdot \dot{\varphi} + \frac{1}{2} m \cdot l^2 \cdot \dot{\varphi}^2$$

A potenciális (helyzeti) energia jelen esetben csak a nehezék gravitációs helyzeti energiája:

$$V = m \cdot g \cdot y_m = m \cdot g \cdot l \cdot \cos \varphi$$

Ezekkel már felírhatjuk a rendszer $L = T - V$ Lagrange-függvényét. Jelen esetben:

$$L = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 - m \cdot l \cdot \cos \varphi \cdot \dot{x} \cdot \dot{\varphi} + \frac{1}{2}m \cdot l^2 \cdot \dot{\varphi}^2 - m \cdot g \cdot l \cdot \cos \varphi$$

Tehát előállt az inverz inga Lagrange-függvénye az x és φ általános koordinátákkal, valamint $\dot{x}$ és $\dot{\varphi}$ általános sebességekkel.

A disszipatív jellegű mozgást akadályozó erőknek nincs potenciálja, de szokás bevezetni pszeudo potenciált (ún. Rayleigh potenciált). Jelen modellben a mozgást akadályozó (pl. közegellenállási) erőt első közelítésben elhanyagolhatónak tekintjük, de a későbbiekben tárgyalt gerjesztett ingánál majd utólag, a mozgásegyenletek szintjén „kézzel” beillesztjük a súrlódási erőt.

Jelölje $\vec{F}_i(F_{ix}, F_{iy}, F_{iz})$ a rendszer i -indexű elemére ható nem-konzervatív külső erők eredőjét, $\vec{r}_i(x_i, y_i, z_i)$ pedig a hatáspont (támadáspont) helyvektorát. A q_j általános koordináta-hoz rendelt Q_j általánosított erő definíciója:

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \left(F_{ix} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right)$$

Jelen esetben csak a vízszintes F erő hat a kocsira, vagyis az x koordinátájú pontban, tehát:

$$\vec{F}_1(F, 0, 0) \text{ és } \vec{r}_1(x, 0, 0),$$

így (nem felejtve, hogy a $q_1 = x$ és $q_2 = \varphi$):

$$\begin{aligned} Q_1 &= F \cdot \frac{\partial x}{\partial q_1} + 0 \cdot \frac{\partial y}{\partial q_1} + 0 \cdot \frac{\partial z}{\partial q_1} = F \cdot \frac{\partial x}{\partial x} = F \\ Q_2 &= F \cdot \frac{\partial x}{\partial q_2} + 0 \cdot \frac{\partial y}{\partial q_2} + 0 \cdot \frac{\partial z}{\partial q_2} = F \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} = 0 \end{aligned}$$

Mivel két általános koordinátánk van $q_1 = x$ és $q_2 = \varphi$, így kétszer kell felírunk a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

Euler-Lagrange egyenletet, hogy megkapjuk a keresett mozgásegyenleteket.

Tekintsük először a $q_1 = x$ általános koordinátát és végezzük el az előírt deriválásokat (a teljes deriváltaknál használva a láncszabályt).

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M + m)\dot{x} - m \cdot l \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= (M + m)\ddot{x} + m \cdot l \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - m \cdot l \cdot \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi} \\ \frac{\partial L}{\partial q_1} &= \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

Így az Euler-Lagrange egyenlet:

$$(M + m)\ddot{x} + m \cdot l \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - m \cdot l \cdot \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi} = F \quad (\text{F.2.a})$$

Tekintsük ezután a $q_2 = \varphi$ általános koordinátát:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = -m \cdot l \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} + m \cdot l^2 \cdot \ddot{\varphi} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m \cdot l \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \cdot \ddot{\varphi} - m \cdot l \cdot \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot l^2 \cdot \ddot{\ddot{\varphi}} \\ \frac{\partial L}{\partial q_2} &= \frac{\partial L}{\partial \varphi} = m \cdot l \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot g \cdot l \cdot \sin \varphi\end{aligned}$$

Így az Euler-Lagrange egyenlet ezúttal:

$$m \cdot l \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \cdot \ddot{\varphi} - m \cdot l \cdot \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot l^2 \cdot \ddot{\ddot{\varphi}} - \{m \cdot l \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot g \cdot l \cdot \sin \varphi\} = 0$$

Egyszerűsítések után:

$$m \cdot l \cdot \ddot{\ddot{\varphi}} - m \cdot \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi} - m \cdot g \cdot \sin \varphi = 0 \quad (\text{F.2.b})$$

Az utóbbi egyenletben m tömeggel még egyszerűsíthetnék, de tudatosan nem osztjuk végig, hogy az egyenlet (F.2.a)-hoz hasonlóan erő mértékegységű maradjon.

B. Dimenziótlanítás

Megfelelően választott változók segítségével a mértékegységek kitranszformálhatók a dinamikai egyenletekből. Az ún. *dimenziótlanítás* alap gondolata az, hogy minden rendszernek van saját jellegzetes hosszúság- és/vagy időskálája. A dimenziótlanítás egyfelől az egyenletek numerikus megoldásra alkalmas alakjának megtalálásában nagy gyakorlati jelentőségű (a számítógéppel végzett numerikus algoritmusok csak számokkal dolgoznak, nem tudnak mértékegységeket kezelni!). Másfelől nagyon mély analógiákra mutat rá, látszólag távol eső fizikai rendszerek, problémák közötti lehetséges kapcsolat felderítését teszi lehetővé. A dimenziótlan mozgásegyenletekben ugyanis nem csak a változók mértékegység nélküliek, de a megjelenő új paraméterek is. Az új paraméterek száma kisebb, mint az eredetieké, bár azokból kell „kikeverni” őket. Ez kiemeli a látszólag különböző rendszerek közötti analógiát: minden olyan rendszer időfejlődése ekvivalens (izomorf), amelyek dimenziótlan paraméterei azonosak, akár mennyire is eltérőek az „eredeti” fizikai paraméterek. H. Poincaré szavaival: „A matematikai szellem tanít meg bennünket arra, hogy felismerjük az igazi, mély analógiát, melyet a szem nem lát, csak az ész sejt. A matematikai nyelv nélkül a dolgok belső analógiájának legnagyobb része ismeretlen maradt volna előttünk örökre.”

A tudományban általános értelemben valamely vizsgált valós **R** rendszer modelljének nevezünk egy realizált (megépített) másik **M** rendszert, amennyiben **M** rendszer könnyebben vizsgálható (mérhető, szabályozható) és **M** tanulmányozása információt szolgáltat az eredeti **R** rendszerre. A modellezés aspektusában a dimenziótlanítás fontos lehetőséget ad a kezünkbe, hiszen az izomorf rendszerek (amelyekben tehát a dimenziótlan dinamikai egyenletek és a bennük szereplő dimenziótlan paraméterek azonosak) alkothatnak eredeti rendszer modell-rendszer párt, ha a modell rendszer könnyebben megvalósítható, vizsgálható.

Nézzünk itt most csak egyetlen példát, a gyakorlati életben fontos áramlástan területéről. A cseppfolyós és légnemű közeg áramlását az ún. *Navier-Stokes-egyenletrendszer* írja le, amely matematikai szempontból nagyon bonyolult nemlineáris csatolt parciális differenciális egyenletrendszer. A dimenziótlanítás során megjelenő dimenziótlan paraméterek:

$$\text{Reynolds-szám: } Re = \frac{\nu \rho l}{\eta}, \text{ Froude-szám: } Fr = \sqrt{\frac{v^2}{gl}}, \text{ Rossby-szám: } Ro = \frac{v}{2\omega l},$$

ahol l a rendszer jellemző mérete, ρ , η és ν az áramló közeg sűrűsége, dinamikai viszkozitása és sebessége, g a lokális gravitációs gyorsulás, és amennyiben nem elhanyagolható forgású

vonatkoztatási rendszerben vagyunk (pl. a Föld nagy léptékű áramlásai), akkor ω a forgás szögsebessége.

A praktikus, dimenziótlanított mennyiségek megválasztása és a lényeges dimenziótlan számok azonosítása az adott áramlástan probléma modellezésének alapvető mozzanata, például járművek (gépkocsik, hajók, repülőgépek) tervezésekor. A prototípus és modell viszonylatában csak a Re Reynold-számok azonossága követelmény, ha az áramló közeg a vizsgált objektumot teljesen körülveszi, amennyiben nem veszi teljesen körül, akkor a Fr Froude-számok azonossága is megkövetelendő (ekkor a gravitációs erő is fontossá válhat).



13.. ábra: gépkocsi modell tesztelése vízcsatornában

Például gépkocsi karosszériájának tesztelésekor az F_e közegellenállási erőkre teljesül, hogy:

$$\frac{F_{e_p}}{v_p^2 \rho_p l_p^2} = \frac{F_{e_m}}{v_m^2 \rho_m l_m^2},$$

ha a $Re_p = \frac{v_p \rho_p l_p}{\eta_p}$ és $Re_m = \frac{v_m \rho_m l_m}{\eta_m}$ Reynolds-számok azonos értékűek (p index a prototípust, m index pedig a modellt jelöli).

Köszönetnyilvánítás

Köszönet illeti Tasnádi Péter (ELTE TTK) professzor urat sok éven keresztül tartó együttműködésünkért általában, illetve konkrétan e cikkben található gondolatok és eredmények születésében adott segítségéért.

Irodalomjegyzék

- [1] M. Landry, S. A. Campbell, K. Morris, C. O. Aguilar: Dynamics of an Inverted Pendulum with Delayed Feedback Control, SIAM J. APPLIED DYNAMICAL SYSTEMS, Vol. 4, No. 2, pp. 333–351, DOI. 10.1137/030600461
- [2] Sergey Royz: Stabilizing pendulum on a cart with full state feedback control. Oct. 19, 2019. [Online]. Available: <https://www.youtube.com/watch?v=nOSTzpA0nGk> [Accessed: December 12. 2025]
- [3] Kay Herbert: Vibrating Inverted Pendulum. (Wolfram Demonstrations Project) 2011. [Online] Available: <https://demonstrations.wolfram.com/VibratingInvertedPendulum/> [Accessed: December 12. 2025]
- [4] A. Tjeerd: Kapitza's Pendulum from Lego Technic without a servo mechanism. Dec. 20, 2020. [Online]. Available: <https://www.youtube.com/watch?v=jMvoKpuy7Po> [Accessed: December 12. 2025]
- [5] Nagy Péter: Dinamikai rendszerek szimulációja Dynamics Solver programmal 2022. ELTE [Online] Available: https://fiztan.phd.elte.hu/files/DS/Kaosz_Dynamics_Solver_ELTE_NP.zip [Accessed: December 12. 2025]
- [6] Jaime E. Villate. Dynamics and Dynamical Systems, Lagrangian dynamics. Jan. 11., 2025. [Online]. Available: https://villate.org/dynamics/lagrangian_dynamics.html [Accessed: December 12. 2025]
- [7] A. Galal, T. Amer, H. El-Kafly: Dynamical analysis of a vertical excited pendulum using He's perturbation method. J. of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control. 42. pp. 1328–1338, DOI. 10.1177/14613484231176247.
- [8] N. Bhadra, S. Banerjee: Dynamics of a system of coupled inverted pendula with vertical forcing. Chaos, Solitons & Fractals. Volume 141(25):110358. DOI. 10.1016/j.chaos.2020.110358