

EVOLVENS PROFILÚ HENGERES FOGASKERÉK KONTÚRJÁNAK ANALITIKUS LEÍRÁSA

ANALYTIC DESCRIPTION OF EVOLVENT PROFILE SPUR GEARS

Póka György^{0000-0002-7585-986X}¹, Gergely Attila Levente⁰⁰⁰⁰⁻⁰⁰⁰³⁻⁴⁵³⁶⁻⁷⁶⁴²²,

Máté Márton⁰⁰⁰⁰⁻⁰⁰⁰³⁻⁴¹²⁰⁻³⁰⁴²², Kovács Zsolt Ferenc⁰⁰⁰⁰⁻⁰⁰⁰²⁻⁶⁹⁹⁵⁻⁶⁵⁰⁸³,

Csorba Béla István⁰⁰⁰⁹⁻⁰⁰⁰⁹⁻⁹⁵⁵¹⁻⁷⁴⁷⁸³, Líska János⁰⁰⁰⁰⁻⁰⁰⁰²⁻¹⁶¹⁴⁻⁸⁵⁶⁶^{3*}

¹ Gyártástudomány és -technológia Tanszék, BME Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Magyarország

² Gépészmérnöki Tanszék, Marosvásárhelyi Kar, Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem, Románia

³ Innovatív Járművek és Anyagok Tanszék, GAMF Műszaki és Informatikai Kar, Neumann János Egyetem, Magyarország

<https://doi.org/10.47833/2024.1.ENG.010>

Kulcsszavak:

fogaskerék
evolvens profil
analitikus leírás
alámetszés

Keywords:

spur gears
evolvent profile
analytic description
undercut

Cikktörténet:

Beérkezett 2024. április 25.

Átdolgozva 2024. április 28.

Elfogadva 2024. május 2.

Összefoglalás

A cikk hengeres fogaskerék kontúrjának alaprofilal történő analitikus generálását mutatja be. Bemutatja az általános helyzetű evolvens egyenleteit, a csúcsos-, nyújtott- és hurkolt evolvens keletkezését. Részletesen kitér a fogkontúrt alkotó görbe szakaszok típusára, paramétereire, kezdő- és végpontjuk meghatározására. A bemutatott módszer segítségével nagy pontossággal generálható az evolvens profilú fogaskerék kontúrja, ami számos további vizsgálathoz – FEA, csúszás, zaj stb- biztosítja a megfelelő bemeneti geometriát.

Abstract

In this article the generation of the contour of the evolvent profile spur gears using a rack profile is shown. The equation of the general position evolvent is explained and the different type of evolvent curves are depicted. The component curves of the tooth contour is examined and the calculation of their parameters and valid ranges are also described. The proposed method helps to generate the accurate contour of spur gear, which can be used in further investigations, such as FEA, slip rate, noise and so on.

1. Nomenklatúra

m : modul

α : alaprofiliszög, leggyakrabban 20°

z : fogs szám

h : fogmagasság

h_f : lábmagasság ($h_a + c_0$)

r_b : alapkör sugár

r_w : gördülőkör sugár

r_f : lábkör sugár

p : osztás; s : fogvastagság; e : fogárokszélesség

β : foghajlásszög

ξ : profileltolás tényező

h_a : fejmagasság

c : láb hézag

r_o : osztókör sugár

r_a : fejkör sugár

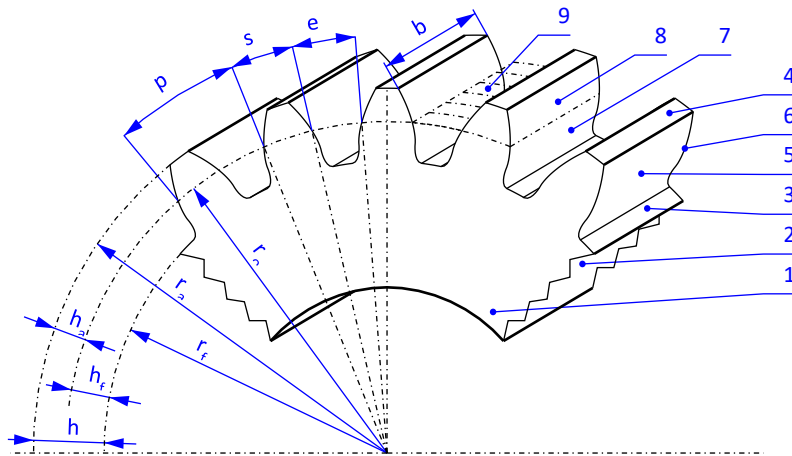
* Kapcsolattartó szerző. Email: liska.janos@nje.hu

2. Bevezetés

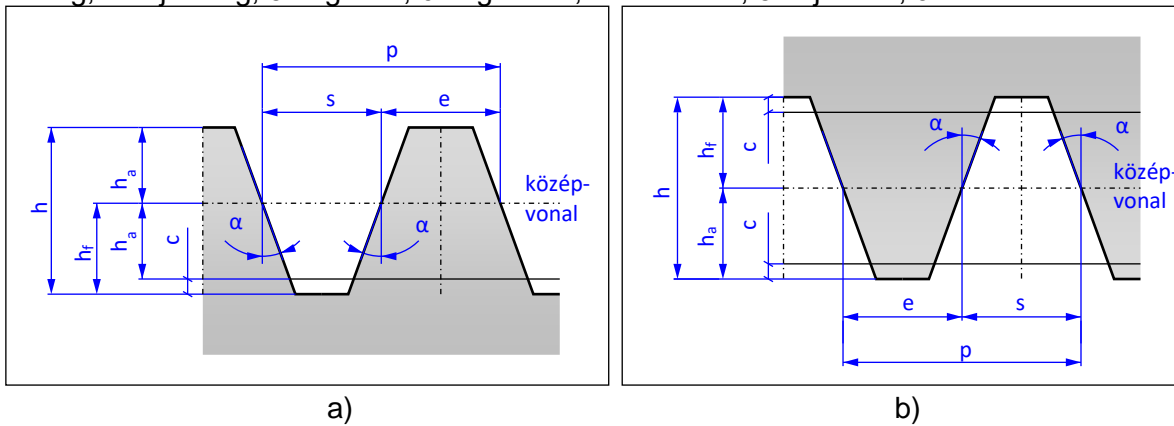
A teljesítmény átvitelére alkalmas fogaskeréppárokkal szemben támasztott követelmények az alábbiak [1,2]:

- Biztosítson állandó áttételt vagy szögsebesség-viszonyt
- Legyen érzéketlen a tengelytáv megváltozására
- Az azonos modulú, különböző fogszámú fogaskerekek kapcsolódjanak egymással

A fenti feltételeknek a gépgyártásban általánosan használt evolvens profil felel meg egyszerre. A fogaskerék általános jelölései az **1. ábrán** láthatók. A szabványos alapprofil és a szerszámprofil a **2. ábrán** látható.



1. ábra Fogaskerék általános jelölései m : modul; p : osztás; s : fogvastagság; e : fogárokszélesség; α : alapprofilszög; h : fogmagasság; h_a : fejszalag; h_f : lábmagasság (h_a+c); c : lábhezág; r_o : osztókör sugar; r_a : fejkör sugar; r_f : láb kör sugar; 1: homlokfelület; 2: keréktest; 3: fenékszalag; 4: fejszalag; 5: fogoldal; 6: fogkontúr; 7: lábfelület; 8: fejfelület; 9: osztófelület



2. ábra a) szabványos alapprofil b) fej- és lábhezággal ellátott szerszámprofil

Ez a cikk az evolvens profilú, egyenes fogú fogaskerék kontúrjának analitikus leírását tárgyalja paraméteres komponens egyenletekkel. Az egyenletek elemi- és kompenzált fogazathoz valamint ferdefogú fogaskerékhez is használhatóak a homlokmodul (m_t), homlokosztás (p_t), homlokkapcsolószög (α_t) stb. behelyettesítésével.

Anisimov és munkatársai [3] egy komplex módszert mutattak be, mellyel különböző periodikus profilokat tartalmazó fogaskerekek modellezhetők. Yazar és munkatársai [4] a szerszámprofil legördítésével modellezték a fogaskerék kontúrját. Zhi-Gen Wang és munkatársai [5] ferdefogú hengeres fogaskerekek áttételének hibáját vizsgálták terheletlen és terhelés melletti állapotban. A fogaskerék kontúrját a szerszám legördítésével határozták meg. Eredményeik szerint az alapprofil kismértékű megváltoztatásával hatékonyan csökkenthető az érintkezési pontban a feszültség és a rezgések. Spitas és munkatársai [6] a fogaskerék láb görbét alkotó hurkolt evolvenst körrel helyettesítették. Eredményeik szerint a fog hajlítási szilárdsága 70%-kal növekedett.

3. Evolvensprofilú fogaskerék kontúr analitikus generálása

3.1. Körevolvens görbék analitikus leírása

Az általános helyzetű és alakú körevolvens t paraméteres egyenletének x és y komponense legyen $ex(t)$ és $ey(t)$:

$$ex(t) = (r + cnst_2)\cos(t + cnst_0) + (r \cdot t + cnst_1)\sin(t + cnst_0) \quad (1)$$

$$ey(t) = (r + cnst_2)\sin(t + cnst_0) - (r \cdot t + cnst_1)\cos(t + cnst_0) \quad (2)$$

t paraméter a gördülőgörbe (egyenes) és az állógörbe (kör) érintkezési pontjához (P_0) tartozó polárszög; r : az állógörbe vagy alapkör sugara, középpontja O , az origó.

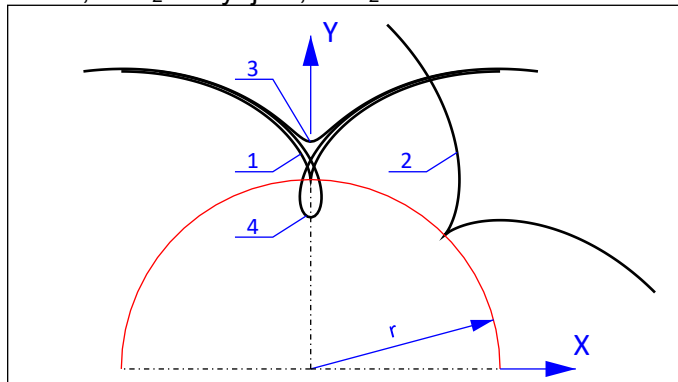
A kezdeti feltételekkel a görbe különböző transzformációi valósíthatók meg.

$cnst_0$: teljes görbe elforgatása az alapkör középpontja körül

$cnst_1$: a rajzoló pont, P_1 eltolása a legördülő egyenesen

$cnst_2$: P_1 eltolása a legrövidített egyenesre merőlegesen

Ha $cnst_2=0$ akkor csúcsos, $cnst_2>0$ nyújtott, $cnst_2<0$ hurkolt evolvens adódik (3. ábra)



3. ábra 1: csúcsos evolvens, $cnst_0=\pi/2$, $cnst_1=0$, $cnst_2=0$, $t=-\pi/2 \dots \pi/2$
 2: csúcsos evolvens, $cnst_0=\pi/4$, $cnst_1=0$, $cnst_2=0$, $t=-\pi/2 \dots \pi/2$
 3: nyújtott evolvens, $cnst_0=\pi/2$, $cnst_1=0$, $cnst_2=5$, $t=-\pi/2 \dots \pi/2$
 4: hurkolt evolvens, $cnst_0=\pi/2$, $cnst_1=0$, $cnst_2=-5$, $t=-\pi/2 \dots \pi/2$

3.1. Egy fog kontúrjának analitikus generálása

Egy fog kontúrja a következő görbékből állítható össze:

- fejkör (körív)
- lábkör (körív)
- fogoldal (csúcsos evolvens), bal és jobb oldal
- fogláb görbe (hurkolt evolvens), bal és jobb oldal

A csúcsos evolvens. esetén az alapkörön (r_b), a hurkolt evolvens. esetén pedig az osztókörön (r_o) gördül le az egyenes. A csúcsos evolvens görbe alapkör sugara az osztókörből és a kapcsolószögéből számítható: $r_b = r_o \cos(\alpha)$.

A hurkolt evolvens. adja a fogláb- vagy fogtőgörbét. Ha nincs alámetszés, akkor a csúcsos és hurkolt evolvens érintőlegesen csatlakozik.

Legyen az első fog szimmetrikus az y tengelyre, ekkor a szerszámprofil is szimmetrikusan helyezkedik el y tengelyre.

Ahhoz, hogy a $cnst_0 \neq 0$ és $cnst_1 = cnst_2 = 0$ paraméterekkel adott csúcsos evolvens a fogoldalt adja, az origó körül két lépésben el kell forgatni.

A csúcsos evolvens először úgy kell elforgatni, hogy az áthaladjon az osztókör és az y teng. közös metszéspontján (4a ábra). Ezután tovább kell forgatni az osztókörön mért fogszélességhez tartozó polárszögével, θ_o -val. Ha $\xi = 0$ akkor a 3a, ha pedig $\xi < 0$ akkor a 3b egyenlet szerint számítható θ_o értéke:

$$\theta_o = ((p/4)/r_o) \quad (3a)$$

$$\theta_o = ((p/4 + \xi \cdot m \cdot \tan(\alpha))/r_o) \quad (3b)$$

Tekintsük a **4b ábrát** κ szög meghatározásához, ahol egy r_b alapkör sugarú csúcsos körevolvens látható. A PQO derékszögű háromszög alapján felírható a P pontba húzható ρ polársugár:

$$\rho = \sqrt{r_b^2 + (r_b \cdot t_i)^2} \quad (4)$$

A csúszásmentes gördülés miatt a PQ befogó megegyezik a legördült ívhosszal:

$$\overline{PQ} = r_b \cdot \tan(\alpha) = r_b \cdot t_i \quad (5)$$

Az egyenletből kifejezhető $\tan(\alpha)$ és α :

$$\tan(\alpha) = t_i \quad (6a)$$

$$\alpha = \arctan(t_i) \quad (6b)$$

A P ponthoz tartozó Φ polárszög a legördült ívhossz és α különbsége:

$$\text{inv}(\alpha) = \Phi = \text{const}_0 + \tan(\alpha) - \alpha \quad (7)$$

Az (7) egyenletben kifejezhető t_i segítségével $\tan(\alpha)$ és α , a (6a) és (6b) egyenlet behelyettesítésével:

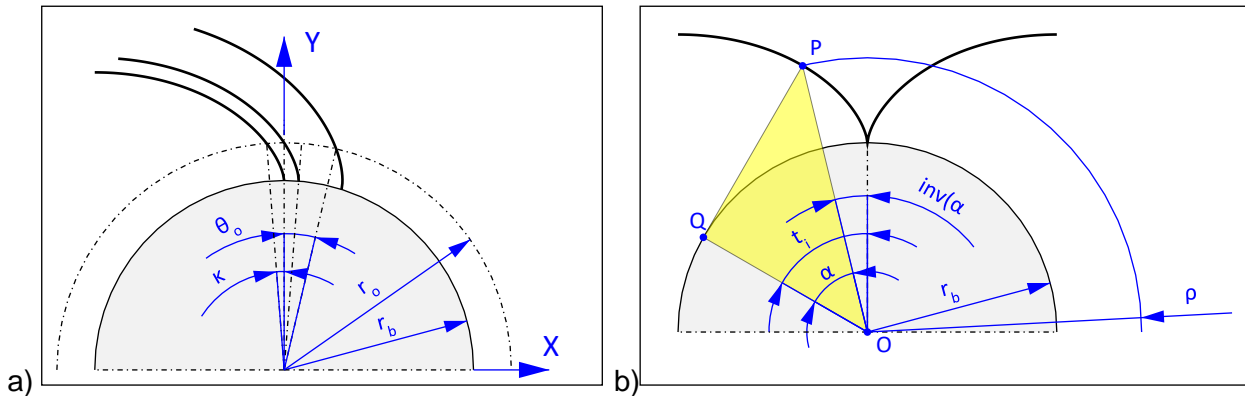
$$\text{inv}(\alpha) = \Phi = \text{const}_0 + t_i - \arctan(t_i) \quad (8)$$

A (4) egyenletből kifejezhető t_i , $\rho=r_o$ behelyettesítéssel:

$$t_i = \sqrt{(\rho^2 - r_b^2)/r_b^2} = \sqrt{(r_o^2)/r_b^2 - 1} \quad (9)$$

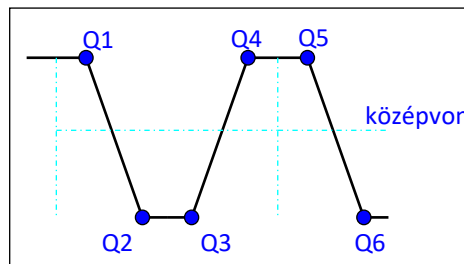
(9) egyenletet behelyettesítve (8) egyenletbe, megkapjuk a keresett ρ polársugarhoz tartozó κ szöget:

$$\kappa = \sqrt{r_o^2/r_b^2 - 1} - \arctan\sqrt{r_o^2/r_b^2 - 1} \quad (10)$$



4. ábra Csúcsos körevolvens a) elforgatása b) polársugara és polárszöge

Az alaprofil jellegzetes pontjai Q tömbbe gyűjthetők (5. ábra). Az első négy pont x koordinátájának kiszámítása után a többi egy-egy osztás eltolásával megkapható. Minden egymást követő negyedik pont y koordinátája megegyezik. A szerszám-középvonalon a fogárokszélesség és fogszélesség megegyező. Ha nincs profilleltolás, akkor az osztóvonal egybeesik a középvonallal és a középvonal érinti az osztókört.



5. ábra Az alaprofilon felvett pontok

$$Q_{1,4i+1} = (i \cdot p) + (p/4 + h_a^* \cdot m \cdot \tan(\alpha))$$

$$Q_{1,4i+2} = (i \cdot p) + (p/4 - h_f^* \cdot m \cdot \tan(\alpha))$$

$$Q_{1,4i+3} = (i \cdot p) + (p \cdot 3/4 - h_f^* \cdot m \cdot \tan(\alpha))$$

$$Q_{1,4i+4} = (i \cdot p) + (p \cdot 3/4 + h_a^* \cdot m \cdot \tan(\alpha))$$

$$Q_{2,4i+1} = m \cdot (h_a + \xi)$$

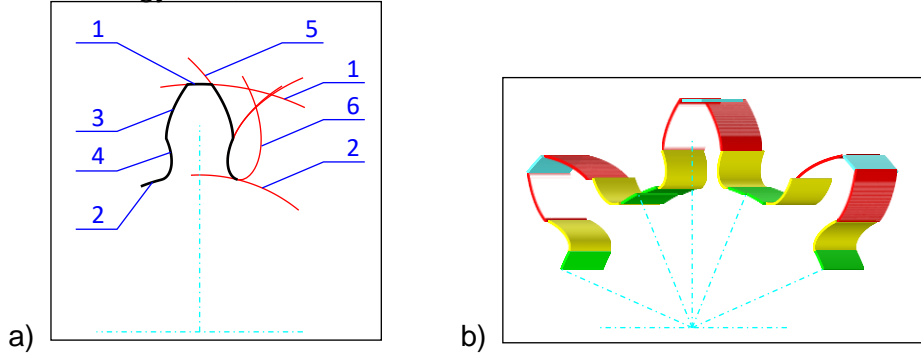
$$Q_{2,4i+2} = m \cdot (\xi - h_f)$$

$$Q_{2,4i+3} = Q_{2,4i+2}$$

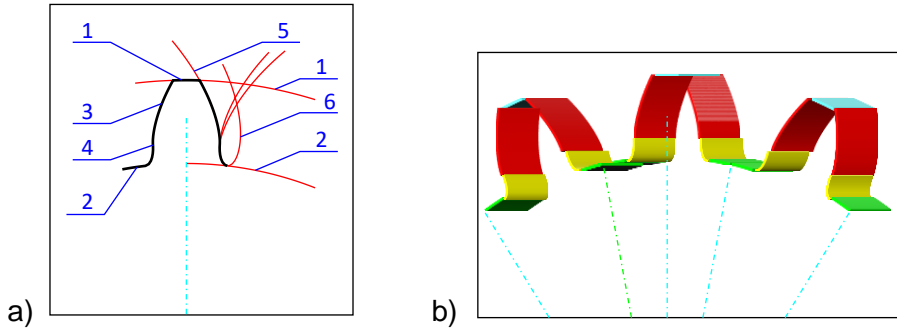
$$Q_{2,4i+4} = Q_{2,4i}$$

A hurkolt evolvenst fenti definiálás alapján Q_2 pont rajzolja, a fogoldalt és a lábkört létrehozó szakaszok metszéspontja.

A fogaskerék egy fogoldalának megrajzolásához az alkotó görbék metszéspontjának meghatározása szükséges. A csúcsos evolvens és a hurkolt evolvens a 6. ábrán látható $z=10$ fogú keréknél metszi egymást, a fogkontúr alámetszett. A 7. ábrán látható $z=21$ fogú keréknél a csúcsos és hurkolt evolvens érinti egymást, nincs alámetszés.



6. ábra $z=10$ fogs számú kerék a) 1: fejkör; 2: lábkör; 3: fogoldal; 4: lábgörbe; 5: csúcsos evolvens; 6: hurkolt evolvens b) a fogoldal részei különböző színekkel megjelölve



7. ábra $z=21$ fogs számú kerék a) 1: fejkör; 2: lábkör; 3: fogoldal; 4: lábgörbe; 5: csúcsos evolvens; 6: hurkolt evolvens b) a fogoldal részei különböző színekkel megjelölve

A csúcsos és hurkolt evolvens metszéspontja vektorgrafikus CAD szoftver segítségével könnyedén megszerkeszthető. Ennél pontosabb megoldást ad az alábbi egyenletrendszer megoldása.

$$ex(t)|r_b, cnst_0, cnst_1, cnst_2 = ex(\tau)|r_o, cnst_0', cnst_1', cnst_2' \quad (11a)$$

$$ey(t)|r_b, cnst_0, cnst_1, cnst_2 = ey(\tau)|r_o, cnst_0', cnst_1', cnst_2' \quad (11b)$$

Egyszerűsíthető valamelyest a számítás a polársugár és polárszög használatával:

$$\rho(t)|r_b, cnst_0, cnst_1, cnst_2 = \rho(\tau)|r_o, cnst_0', cnst_1', cnst_2' \quad (12a)$$

$$\varphi(t)|r_b, cnst_0, cnst_1, cnst_2 = \varphi(\tau)|r_o, cnst_0', cnst_1', cnst_2' \quad (12b)$$

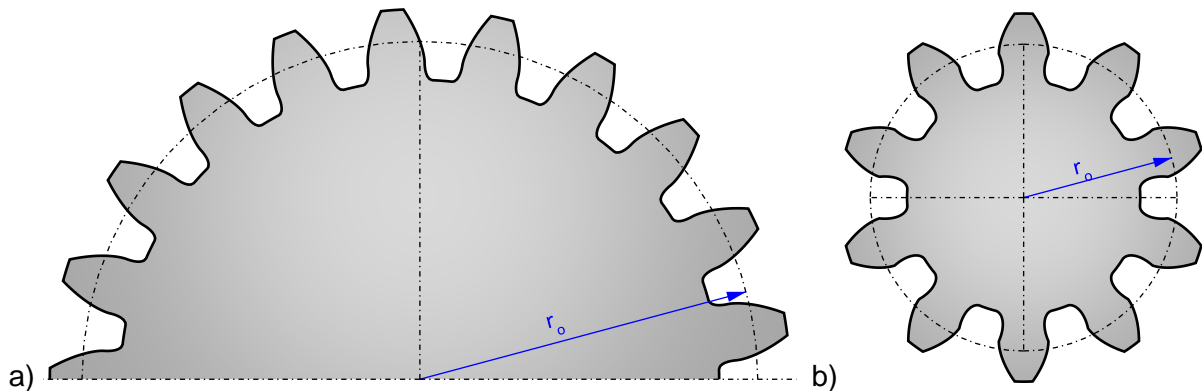
A számítás komplexitása nagy, mivel t és τ paraméterek egymástól függetlenek, azonban korszerű komputer algebrai szoftverekkel megoldható a probléma.

A fogaskerék egyik y tengelyre szimmetrikus fogoldala az $ex(t)$ és $ey(t)$ egyenletek felhasználásával az 1. táblázatban összefoglalt behelyettesítésekkel állítható össze.

1. Táblázat. Egy fog kontúrjának jellegzetes szakaszai és paraméterei

Szakasz	Típus	Paraméterek	Határok	
			kezdő	befejező
fejkör	kör	r_a sugár	t_{h11} : csúcsos evolvens és fejkör metszéspontja	t_{h12} : fejkör és Y tengely metszéspontja
fogoldal	csúcsos evolvens	alapkör sugár r_b , $cnst_0 = \pi/2 - \kappa - \theta_0$, $cnst_1 = 0$ és $cnst_2 = 0$	t_{h21} : csúcsos evolvens és fejkör metszéspontja	$t_{h22} = t_{h11}$
láb görbe	hurkolt evolvens	alapkör sugár r_o , $cnst_0 = \pi/2$, $cnst_1 = Q_{1,2}$ és $cnst_2 = Q_{2,2}$ (alternatív: $cnst_1 = 0$; $cnst_0 = Q_{1,2}/r_o$)	t_{h31} : csúcsos evolvens és láb kör metszéspontja	$t_{h32} = t_{h21}$
láb kör	kör	r_f sugár	$t_{h41} = \pi/2 - 2 \pi/z$ hurkolt evolvens és láb kör metszéspontja;	$t_{h42} = t_{h31}$

Az egyik fogoldal és láb görbe létrehozása után a másik az y tengelyre tükrözéssel készíthető el. A teljes fogkontúrt tehát a bal és jobb fogoldal, bal és jobb oldali láb görbe, fejkör és láb kör alkotja. A fogoldal egyes részei diszkrét pontokra felbontva ábrázolható. A pontok közötti távolság $m/30$ esetén megfelelő eredményt ad, $m/100$ már a legmagasabb igényeket is kielégíti. Egy fogoldal kontúrját felhasználva, az origó körül polárisan kiosztva a fogszámnak megfelelően, a komplett fogaskerék kontúr adódik (8. ábra).

8. ábra Fogaskerék kontúr kirajzolása a) $z=21$, $\xi=0$ b) $z=10$, $\xi=0$

Irodalomjegyzék

- [1] Vörös: Gépelemek III., Tankönyvkiadó, Bp. 1977
- [2] Simon V. szerk.: Gépelemek II. Műegyetemi kiadó, 2008
- [3] R. Anisimov, A. Tarapanov, N. Kanatnikov: Complex Analysis of Edge Cutting Machining of Periodic Profiles. Procedia Engineering 206 (2017) 1452–1457. 10.1016/j.proeng.2017.10.660
- [4] Mehmet YAZAR, Mithat YANIKÖREN: Spur gear design, manufacturing and noise analysis according to rolling method using complex numbers. GUFBD / GUJS (2022) 12(1): 78-89. DOI: 10.17714/gumusfenbil.854411
- [5] Zhi-Gen Wang, Yi-Cheng Chen: Design of a helical gear set with adequate linear tip-relief leading to improved static and dynamic characteristics. Mechanism and Machine Theory. Volume 147, May 2020, 103742. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2019.103742>
- [6] V. Spitas, Th. Costopoulos and C. Spitas: Increasing the Strength of Standard Involute Gear Teeth with Novel Circular Root Fillet Design. American Journal of Applied Sciences 2 (6): 1058-1064, 2005. ISSN 1546-9239. DOI: 10.3844/ajassp.2005.1058.1064