Gradus Vol 10, No 2 (2023)
ISSN 2064-8014

KÉSZLETEZÉSI MODELLEK OKTATÁSA GEOGEBRÁBAN

TEACHING INVENTORY MODELS WITH GEOGEBRA

Nagyné Csóti Beáta[0009-0007-8818-2521*], *Kovács Edith Alice*[0000-0001-7687-4335]

Analízis és Operációkutatás Tanszék, Matematika Intézet, Természettudományi Kar, AdOpt kutatócsoport
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Magyarország
https://doi.org/10.47833/2023.2.CSC.020

Kulcsszavak:
készlet modellek
GeoGebra
optimalizálás
szimuláció
sztochasztikus készletezés

Keywords:
inventory models
GeoGebra
optimization
simulation
stochastic inventory model

Cikktörténet:
Beérkezett 2023. augusztus 23.
Átdolgozva 2023. november 15.
Elfogadva 2023. november 17.

Összefoglalás
A készletezési modellek fontos szerepet játszanak a gazdálkodásban. A cikkünk célja egy lehetséges módszertani utat mutatni ahhoz, hogy az alap determinisztikus EOQ modell által leírt folyamat vizualizációból kiindulva hogyan építhető fel, érthető meg, és vezethető be egy sztochasztikus elemekkel rendelkező modell, illetve hogyan érthető az meg szimuláció által.
A bemutatott módszertan kihasználja a GeoGebra dinamikus matematikai szoftver lehetőségeit, ilyen módon nem csak az oktatásban játszik fontos szerepet, hanem szimulációk elkészítésével ipari felhasználók is tudják alkalmazni, ezért beépíthető a vállalati irányítási rendszerükbe.
Cikkünkben ezt a tanítási/ tanulási utat bekapcsoljuk az EduBase által biztosított új generációs oktatási platformba.

Abstract
Stock models play an important role in economics. The aim of our paper is to give a methodology which uses visualization to lead the students from a deterministic EOQ model to a stochastic model, based also on simulation.
The methodology presented exploits the possibilities of the Geogebra dynamic software. This software can be used not only for teaching and learning but also for industrial and management purposes because it can be integrated into corporate management systems.
In this article, we will integrate this teaching/learning pathway into the new generation of educational platform provided by EduBase.

1. Bevezetés

A készletezési modellek a közgazdász, logisztikai mérnök, műszaki menedzser képzés mindegyikében megjelennek mind az alap, mind a mesterképzésben. Ezeket általában nem a

* Kapcsolattartó szerző.
E-mail cím: ncsb@math.bme.hu

módszertani alapozó matematikai kurzusok tárgyalják, hanem már az ezekre az alapokra építő szakmai tárgyak. A matematikai gondolkodás kialakításában fontos szerepet játszik az intuíció és az algoritmikus szemlélet. Az intuitív tanulásnak szerepe van a megértésben és elsajátításban, az algoritmizálás pedig, a megértéstől a „megteremtéshez” vezető utat adhatja meg.

A dolgozatunkban bemutatott módszer hátterét a következő feltételek biztosítják:

- a különböző digitális, mobil eszközök általános elterjedése,
- a tudástárakhoz és adatokhoz való széleskörű hozzáférés,
- az ingyenesen elérhető dinamikus matematikai szoftverek megjelenése.

Az online használható módszertanok bevezetéséhez az u.n. pandémia is hozzájárult. Ennek köszönhetően kialakultak kooperatív, egymást segítő, tanító, fejlesztő tanári közösségek. Ugyanakkor a hirtelen online oktatásra való átállásra még nem voltak egyáltalán felkészülve a tanárok, ezekről a problémákról számtalan cikk született. Ezek közül kiemeljük Rapanta és munkatársai friss cikkét [9].

Az oktatás radikális változása és magának a változás szükségszerűségének a megtapasztalása új módszertanok bevezetésére ösztönözte a tanárokat. A változások jellemzően nem tudtak az egész oktatási rendszerben sem horizontálisan – területileg, sem és vertikálisan - időben az egyes képzési szinteken ugyanolyan ütemben végbemenni, de lokálisan kezdenek terjedni és az így kialakult kisebb közösségek összekapcsolása lehetne egy hatékony módja ezeknek a módszereknek a még gyorsabb terjedésére.

Egyre inkább az a törekvés, hogy a hallgatók alkalmazott tudásra, innovatív gondolkodásra legyenek nevelve. Ez az irány egyre markánsabban követel helyet magának az oktatásban.

A fiatalok többsége nem könyvet akar olvasni, hanem kihívásokkal találkozni, kíváncsisága, érdeklődése sokkal praktikusabbá vált. Ez a generáció hamarabb akarja kipróbálni, megtapasztalni, mire képes. A szinte határtalanná kiszélesedett és egyre gyorsabban változó világban fenntartani és értelmes célokra fókuszálni a figyelmüket egyre nehezebb. A megszerzett tudásukról pedig azonnali visszajelzést szeretnének kapni ugyanúgy, mint az online játékaikban. Nem titkolt cél az sem, hogy tudásukat minél hamarabb akarják munkahelyeken, akár már a duális képzés során kamatoztatni.

Hertel és Millis [7] már jóval korábban, 2002-ben felismerték, hogy hogyan lehet, és mennyire fontos behozni az oktatásba a valós problémákat, kihangsúlyozva azt, hogy a szimulációk képesek áthidalni a szakadékot az elmélet és az alkalmazás között, azzal a céllal, hogy a hallgatók ez által jobban megértsék a kettő kapcsolatát. Törekedni kell olyan modelleket építeni, amelyekből szimulálva egyre jobban közelítjük a valós adatokat.
Bransford, Brown, és Cocking 2000-ben [2] olyan pedagógiai eljárásokat dolgoztak ki, amelyek a szimulációkból való tanulásra vonatkoznak, kiemelve, hogy ez a szakértői rutin, amire így szert tesznek, továbbfejleszthető rugalmasan adaptálódó tudássá. Ez azt jelenti, hogy a hallgatók azt is megtanulják, hogyan vigyék át a tudást, és hogyan alkalmazzák újabb problémákra, kísérletek alapján, hogyan tudnak modelleket alkotni, az eredményekből, hogyan tudnak következtetéseket levonni.
Shute és Glaser [10] tanulmányukban bemutatták, hogy azok a hallgatók, akiknek oktatásában a szimulációk helyet kaptak, sokkal hamarabb sajátították el az elméleti tananyagokat is, mint akik esetében ezt nem tették. Ugyanakkor De Jong [6] cikkéből kiderül, hogy szimulációs tanítás esetén kiemelkedően fontos szerepe van a tanárnak vagy az online platformnak, amin keresztül ez az oktatás zajlik, aki/ ami támogatja a szimulációk kielemzését. Porter 2004-es [8] cikkében rámutat arra, hogy a közgazdasági szaktantárgyak esetében, milyen fontos szerepet játszik a szimuláció, és ennek alapja a matematikai modellezés.

2. A használt eszköztárak bemutatása

Az itt bemutatott alap EOQ modellek megértésére és elsajátítására, két fontos eszköztárat használtunk. A velük végzett munkát és annak tanulságait ismertetjük a jelen cikkünkben.

2.1. GeoGebra* dinamikus matematikai szoftver

Az egyik eszköztár a GeoGebra dinamikus matematikai szoftver, https://www.geogebra.org/ amellyel lépésről lépésre építhető fel, tehető láthatóvá egy-egy gyakorlati probléma matematikai absztrakciója. A szemléltetést elősegíti, hogy a paraméterek értékei egy-egy csúszka által változtathatók. A csúszka megadásakor meg kell adnunk azt az intervallumot, ahonnan a paraméter az értékeit veheti. Ez azon túl, hogy változtatásukkal vizsgálhatjuk hatásukat arra a problémára, folyamatra, célfüggvényre, ami éppen a vizsgálatunk tárgya, alkalmassá teszi korlátozó feltételek beépítésére a modellünkbe.
Ezek a csúszkák adják meg a hallgató vagy alkalmazó szakember és a modell vagy folyamat közti interakció lehetőségét. Először a GeoGebra előre elkészített modelljeivel ismerkedhetnek meg kísérletezéssel, majd egy- egy újabb paraméter változásának beiktathatóvá tételével a hallgatók maguk is továbbfejleszthetik a GeoGebrában lévő modelleket. Így a GeoGebra egy fontos konstruktív fogalomalkotás módjának eszköze lesz. Másrészt, fontos eszközt ad a szimulációkhoz. Ezt bővebben a következő rész második fejezetében fogjuk kifejteni.

A hallgatók azért tudnak eredményesen tanulni a szimulációk beiktatásával, mert aktívak maradnak, kíváncsian várják a szimulációk eredményeit. Nagyon fontos az eredmények közös kielemezése, az oktatóval együtt átgondolva, levonva a hasznos konklúziókat. Sok kutatás bizonyítja, hogy a számítógépes szimuláció hatással van a megértésre és a fogalmak rögzítésére. Ehhez kapcsolódóan például a Choudhary, F. és Javed, T. 2021-es [5] olyan kísérleteket végeztek, amelyek során a 100 résztvevő diákot, akik részt vettek a kísérletben, két csoportba osztottak. Az egyik csoport klasszikus módszerrel való tanításnak volt kitéve a másik csoport pedig egy szimulációval alátámasztott oktatásnak. Az eredményeiket tesztelték és azt kapták, hogy 0.05 szignifikancia szinten, a szimulációval oktatottak eredményei meghaladták a szokványos oktatásban résztvevőkét.

2.2. EduBase

A másik eszköz, amihez kötődik a jelen cikkünk az EduBase †, amely egy olyan interaktív felületet biztosít, ahol a hallgató tesztelheti interaktívan a tudását, folyamatos visszajelzéseket kapva. A tanár, aki az oktató felületet kezeli, figyelemmel tudja kísérni a rábízott hallgatók aktivitását és haladását, mennyire vannak felkészülve a számonkérésekre, hol szoktak elakadni. Meglátásunk szerint az Edubase egy olyan platformot tud biztosítani, ahol a diákok önállóan is tanulhatnak vagy gyakorolhatnak, személyre szabott ismétlési lehetőségekkel. Azt várjuk, hogy a platform használatával illetve az új oktatásmódszertan bevezetésével az oktatás hatékonyabbá válik, ezáltal csökkenthető a hallgatók lemorzsolódása, hiszen a platformon keresztül a hallgatók visszajelzést kapnak tudás szintjükről.

3. EOQ Modellek a determinisztikus esettől a sztochasztikus elemeket tartalmazó esetig

Ez a fejezet tartalmazza az EOQ alapmodell felépítését, figyelembe véve a folyamatot befolyásoló determinisztikus tényezők szerepét. Majd a modellt továbbfejlesztjük úgy, hogy bizonytalan tényezőket is figyelembe vesszük.

* https://www.geogebra.org/
† https://www.edubase.net/

3.1 Az EOQ (Economic Order Quantity) determinisztikus modell – az alapprobléma megfogalmazása

Az EOQ modell kifejezést az optimális rendelési tételnagyság meghatározására felépített modellre használjuk.

Az EOQ alapmodellje a következő alapfeltételezésekből indul ki [12]:

- A felhasználás egy T hosszuságú intervallum alatt egyenletes és állandó rátájú. T-t (általában 1 évnek tekintjük). Ha D-vel (**D**emand) jelöljük az egy időegységre jutó keresletet, akkor bármely t hosszúságú időintervallumban időegységekben a keresletet D_t-vel jelöltük.
- Ha egy q (**q**uantity) egységű rendelést feladunk akkor egy K nagyságú rendelési és szállítási költség keletkezik.
- Az utánpótlási idő (rendelés és teljesítés közt eltelt idő) minden rendelés esetén 0.
- Hiányt nem engedünk meg.
- A készlettartás költségét (**h**olding cost) egységnyi termékre és egy időegységre, jelöljükh-val!
- A célunk az összköltség (**T**otal **C**ost) $TC(q)$ függvény minimalizálása, és ezáltal, az optimális rendelési tétel nagysága (q) meghatározása, vele együtt pedig az is, mikor történjen a rendelés.

A matematikának már nem, de a közgazdaságtannak célja tovább elemezni, milyen további elemeire bonthatók ezek a költségtípusok, ill. az, hogy egy felmerülő költséget miért épp abba a költségtípusba sorolja.

Az alábbi összefüggés az optimalizálandó (itt ez költség minimalizálást jelent) egyváltozós összköltség-függvényt adja meg.

$$TC(q) = \frac{K \cdot D}{q} + p \cdot D + \frac{h \cdot q}{2} \tag{1}$$

ahol *p* az 1 db-ra vonatkozó ár és *D* a kereslet.

Vegyük észre, hogy egyetemi tanulmányaink alatt, az alapozó matematika kurzusokon a következő formában adtunk és kaptunk egy függvényt vizsgálatra, ami teljesen analóg a fenti feladattal:

$$f(x) = \frac{5}{x} + 4 + \frac{3x}{2}$$

Az itt bevezetett módszertan több megismerési szintből áll:

- **Első színt:** Tudatosítani, hogy mely betűk jelölnek változókat és mely betűk jelölnek paramétereket.
- **Második színt:** A matematikai probléma fölírása, az összköltséget befolyásoló tagok beazonosítása, megnevezése és annak felírása, hogyan függ az adott költség a rendelési tétel nagyságától.
- **Harmadik színt:** Megoldási készség kialakítása. Didaktikai szempontból érdemes 1-2 feladatot kézzel, számológéppel megoldani, végiggondolni és a levezetett képletek alkalmazásával kiszámolni.
  A cél az alapösszefüggések rögzítése: a készlettartási költség egyenesen arányos a rendelési tétel nagyságával, a rendelési összköltség fordítottan arányos a rendelési tétel nagyságával, a beszerzési költség pedig nem függ a rendelési tétel nagyságától.
- **Negyedik színt:** Függvény ábrázolása. GeoGebrában rögzített paraméterek mellett szemléltetés alapján fölismerni az optimális (minimális) költséget, optimális rendelési időket és mennyiségeket, visszaigazolni a képlettel meghatározottakat.
- **Ötödik színt:** Hatásvizsgálat. Hogyan hat a paraméterek megváltoztatása a megoldásra.

3.2 Szöveges feladat az EOQ modell alapfeladatára az EduBase-ben

Tekintsünk a következő alapfeladatot [12] könyv, 771. oldaláról:

A Braneast Airlines 500 db hátsólámpát használ évente. Minden alkalommal, amikor hátsólámpát rendelnek, 5$ rendelési költség merül fel. A lámpa 40 centbe kerül és a készlettartási költség 8 cent/lámpa/év. Tegyük fel, hogy a kereslet állandó rátájú és a hiány nem megengedett. Mi az optimális rendelési tételnagyság? Hány rendelést kell feladni egy évben? Mennyi idő telik el két rendelés között?

Konkrét számokkal könnyebb követni az összköltség nagyságát befolyásoló három tagot: hogyan változik a beszerzési költség, a rendelési és a készlettartási költség attól függően, mekkora a rendelési tétel nagysága. A készlettartás összköltségének meghatározása indokolja a fűrészfog ábra, lásd (6. ábra), amelyben a vízszintes tengelyen a vizsgálat kezdetétől eltelt időt ábrázoljuk év mértékegységben mérve, a függőleges tengelyen pedig a rendelési tétel nagyságát (q).

A tanulási folyamat támogatására az EduBase platformot használtuk. Erre való belépési lap a (2. ábra) –n látható. A konferencia résztvevői, akár QR kóddal is beléphettek, lásd (1. ábra).

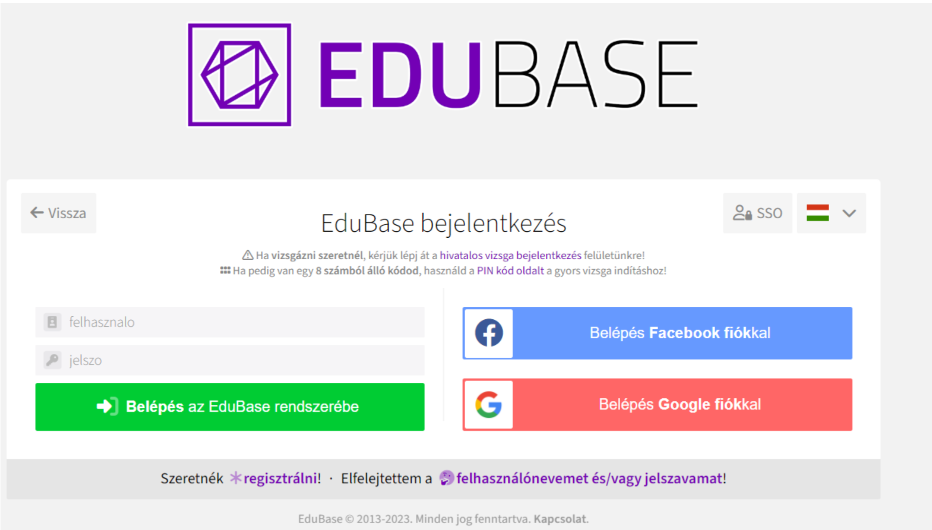
Az alapfeladat és annak paraméterezett változata az Edubase új generációs oktatási platformon lett megszerkesztve, ez a 3. ábrán látható.

A MAFIOK '23 konferenciára létrehoztunk egy teszt csoportot. Két feladatból álló teszt található benne, amit bárki ki tud tölteni, lásd (3. ábra).

A csoporthoz csatlakozni az alábbi linken, vagy QR kóddal lehet: https://www.edubase.net/coupon/V7cj36uh1Y93mQ3u

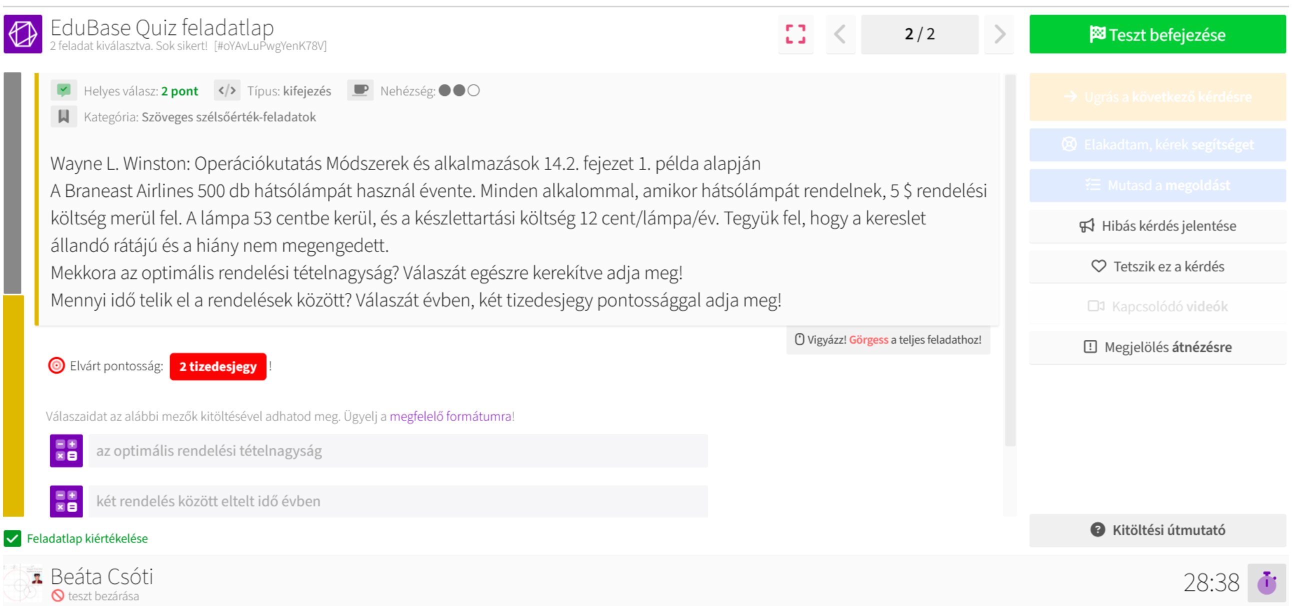
1. ábra A csoport QR kódja

A platform első látogatásakor természetesen kér regisztrációt, felhasználónévvel. E nélkül a hallgatói tevékenységek követése, értékelése sem lenne lehetséges. (Aki tesztelni szeretné csak a rendszert, ismerkedni a felülettel, választhat magának olyan felhasználónevet, ami alapján nem beazonosítható.)



2. ábra Az EduBase platform bejelentkezési felülete

3. ábra A 2 db EOQ alapfeladat szövege az EduBase-ben szerkesztői nézetben



4. ábra A paraméterezett készletezési teszt feladat

Ha a hallgató otthonosan mozog a jelölések és jelentésük között gyorsan észreveszi, hogy a rendelési tétel nagysága (q) az összköltség függvény egyetlen változója, a többi betű a feladatot meghatározó paraméterek. A rendelési költség nevezőjében szerepel, a készlettartási költség számlálójában, a tekintett időszakra vonatkozó beszerzési költség ebben az esetben nem függ a rendelési tétel nagyságától. Az optimális megoldás:

$$q^{opt} = \sqrt{\frac{2KD}{h}} \tag{2}$$

Amennyiben nem tudja megoldani a feladatot, beléphet a megadott linken, a GeoGebrában szerkesztett világba, amit a következő részben ismertetünk.

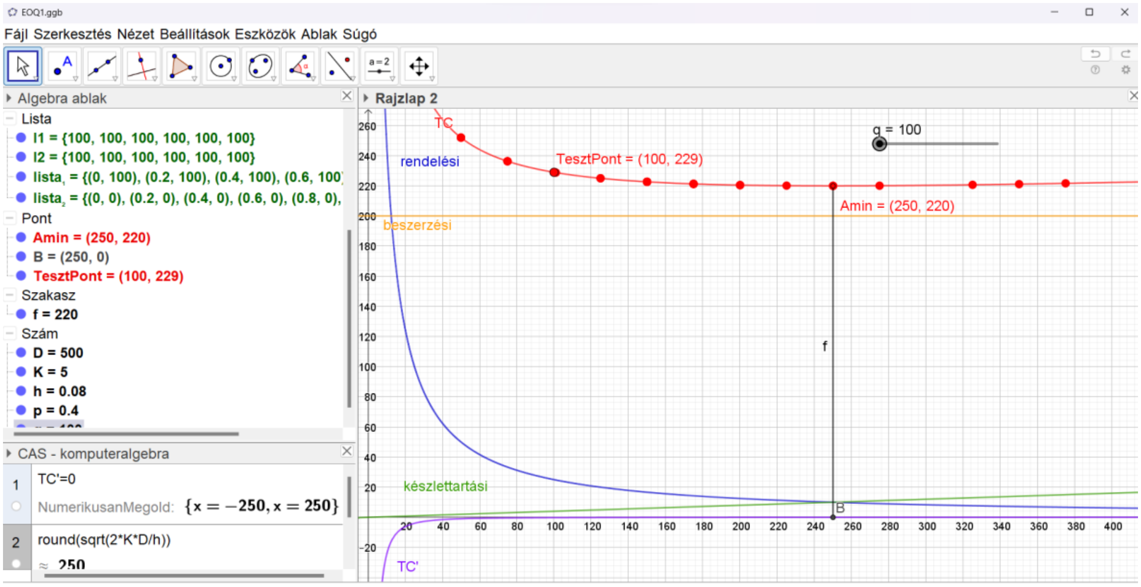
3.3 A GeoGebra modell, a vizualizáció indokoltsága és a benne rejlő lehetőségek

Nézzük először, hogy a GeoGebra használata, milyen problémákat vet fel! Ehhez a GeoGebra tananyag online elérése https://www.geogebra.org/classic/wz7yfvqx, ami a tesztünk kitöltésében segítségünkre lehet.

Ha más betűket használnak az egyes paraméterek jelölésére, már újra át kell gondolni a feladatunkban szereplő 3 paraméter tartalmát. Matematikai kurzusokon és a matematikai szoftverekben a változók alapértelmezett jelölése: *x*, majd *y*, majd *z,* ennél több változó esetén újra az x, de már indexezett alakjait használjuk. Ebben a feladatban hány változó van és melyik betűt is kellene átnevezni x-re? (Ez a kulcs lépés a GeoGebra modellhez.)

A bemutatott példában is rendkívül fontos, hogy melyek a paraméterek, hány változónk van és mi az analízisünk célja. A bonyolult és elvont formalizmust, az elmélet tanulását felváltja a tapasztalat, a kísérletezés. A modellek építése elemi összetevőiből kis lépésenként tart az egyre komplexebb rendszerek szimulációja felé.

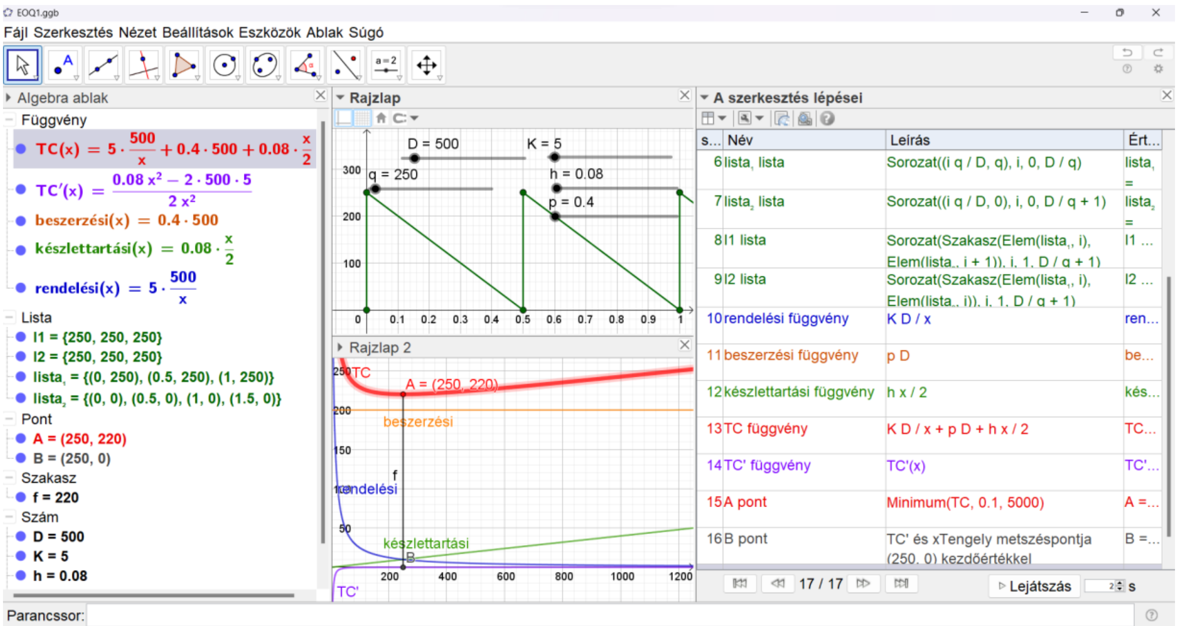
Fontos feladatnak tekintjük a rutint, ami a kizárólagos képlettár használatból adódik, intuitív, valós tudássá alakítani, amelyben a fogalmakat értik és érzékelik a hallgatók.
A tárgyalt esetben építsük együtt fel a modellt! Ha a D, p, h, K paraméterekre csúszkákat definiálunk, vagyis olyan intervallumokat adunk meg, ahonnan értékeiket felvehetik, akkor bármelyik számolási feladatra ezek beállításával megkapjuk a modellt és vele az optimális megoldást is.
A függvény változójára (itt q) bevezetünk egy csúszkát, utána egy TesztPontot $(q, TC(q))$ koordinátákkal. A pont nyomvonalát kirajzoltatjuk. Ha a *q* csúszkát animáljuk, akkor ez a TesztPont, mint futópont felrajzolja az összköltség függvény grafikonját, ahogyan ezt az (5. ábra) mutatja.
Ehhez a legfontosabb a függvény és grafikonja fogalmának készségszintű ismerete. A tanulók, a perceptív változatosság elvét követve ismerik meg a függvényt vagy a modellt, amit megfigyelnek, és amivel interaktívan kísérleteznek.



5. ábra A TesztPont nyomvanalaként kirajzolt összköltség függvény

Az 5. ábrán láthatjuk az EOQ modellnek azt a részét, ahol az összköltség függvény $TC(x)$ pirossal és az őt meghatározó 3 tag grafikonja látható a TesztPont-ként definiált pont nyomvonalával. Látható még a TC', az összköltség deriváltfüggvénye is, aminek zérushelye adja a célfüggvény minimumának a helyét. Azt is látjuk, hogy nem tudnánk leolvasni sem a derivált zérus helyet, sem a TC függvény szélsőértékének a helyét, ahhoz a CAS komputeralgebrai nézetben ki kell adni a parancsot az egyenlet megoldására.

A következő probléma az, hogy ilyen „szép” determinisztikus modell csak a matematikai kurzusokon, osztálytermekben létezik, a gyakorlatban sokkal összetettebb problémákkal szembesülünk. A gyakorlatban általában nem folytonosan figyelhető meg és ráadásul nem is egyenletesen fogy a készlet. Van úgy, hogy hiány is megengedhető, nem pont akkor adjuk le a következő rendelést, amikor kiürül a raktár és nem igaz az, hogy abban a másodpercben már meg is érkezik az új rendelésünk, ahogy azt feladtuk. Az időben lejátszódó sztochasztikus folyamatot a fűrészfog árba.6 elemzésével, újragondolásával és (re)konstrukciójával finomíthatjuk és közelíthetünk vele az adott munkahely készletezési eseteihez és készletezési politikájához. A Chikán Attila szerkesztésében kiadott Készletezési modellek [4] több száz modell kategorizálásával, leírásával és tipizálásával foglalkozik.



6. ábra EOQ alapmodell összköltségfüggvénye és a fűrészfog diagram

3.4 Sztochasztikus készletmodell és szimuláció

A determinisztikus modellből kiindulva az életszerűséget is szem előtt tartva, beláthatjuk, hogy a rendelések beérkezésének időpontja általában nem determinisztikus, sokszor bizonytalanságot tartalmaz, úgyszintén a készletről való fogyás sem tekinthető determinisztikusnak.

Mielőtt áttérnénk a Wayne Winston- [12] konyvbéli eset bemutatására, megragadjuk az alkalmat beszámolni a [1] 2017-ben megjelent cikkről. Ebben a cikkben a szerzők felteszik, hogy a kereslet egy időegység alatt véletlenszerűen jelentkezik, két kereslet között eltelt idő is véletlenszerű, ezért ezeket a mennyiségeket egymástól független azonos eloszlású valószínűségi változónak tekintik. A modellben ugyanazt a mennyiséget rendelik, amikor a készlet szint nullára csökken. A cikkben felismerik, hogy így visszakapják a determinisztikus EOQ formulát, ami egy érdekes összefüggésnek számít. Egy másik friss, ilyen irányú kutatást az utánpótlási idő és a rendelési ár modellezésén alapuló döntéshozatallal kapcsolatban végeztek [11].

A következő lépés, a Wayne Winston [12] sztochasztikus készletezéshez kapcsolódó gondolatmenetet végigvezetni, ami sajnos a könyvben lévő leírásból számunkra nem áll össze logikailag. Ezért a jelen alfejezet egyik célja, hogy a [12] könyv 15.5 fejezetben lévő esetet letisztázza, majd szimulációt készítsen rá.

Legyen D egy időegység alatti kereslet. Ezt most valószínűségi változónak tekintjük.

Majd legyen az utánpótlási idő alatti kereslethez rendelt valószínűségi változó X, vagyis ahhoz a kereslethez rendelünk, ami a rendelés időpontja és a megrendelés beérkezése közötti időben történik.

Először feltesszük, hogy az utánpótlási idő konstans és determinisztikus. Ebben az esetben:

$$E(X) = L \cdot E(D),\ Var(X) = L \cdot Var(D) \tag{3}$$

A továbbiakban tegyük fel azt is, hogy az utánpótlási idők is tartalmaznak bizonytalanságot, ezért jelöljük ezentúl $L -el$ az utánpótlási időhöz hozzárendelt valószínűségi változót.

Feltételezzük, hogy egy időegységben a kereslet független az utánpótlási időtől. Ez esetben a következő képleteket használhatjuk. A (4) várható érték képlet egyszerűen következik felhasználva, hogy $X = L \cdot D$ és abból, hogy L és D függetlenek, viszont a (4) $Var(X)$-et leíró képlet nincsen levezetve vagy megmagyarázva.

$$E(X) = E(L) \cdot E(D),\ Var(X) = E(L) \cdot Var(D) + [E(D)]^2 \cdot Var(L) \tag{4}$$

Tételezzük föl azt az egyszerű esetet, hogy mindkét valószínűségi változó normális eloszlást követ. Egy valós esetnél ezt statisztikai adatok alapján el lehet dönteni, illetve meg lehet határozni a várható értéket és a szórást. (Egy másik valós lehetőség az lenne, hogy az utánpótlásig eltelt idők exponenciális eloszlást követ.)

Az $X = L \cdot D$ valószínűségi változók szorzatát, bár nem definiálják formálisan [12]-ben, megadva az eloszlását, a függetlenségükre támaszkodva definiálják $E(X)$ várható értéket és $Var(X)$ varianciát (4), amely képletek sem levezetve sem megmagyarázva nem lettek. Az $E(X)$ képlete pedig csak akkor áll fenn, ha D –vel az egy időegységre jutó keresletet jelölik, nem egy évre, ahogy azt a [12.] könyv, 807. oldalon írják.

Ezt a sztochasztikus készletezési modellt fogjuk a következőkben szimuláció segítségével ismertetni, pontosabban az utánpótlásig keletkezett keresletet fogjuk így érzékeltetni. Ennek során a véletlen szám generálásnak és annak a készletezési modellben való megjelenítése fontos szerepet játszik.

Megjegyezzük, hogy a GeoGebra eszköz segítségével generálható binomiális, Poisson, normális és egyenletes eloszlást követő véletlen számokat, de könnyen írhatunk programot adott paraméterű exponenciális eloszlást követő valószínűségi változóra is.

A bemutatott példában a készlet kiértékelésének időpontjai közt eltelt időt, illetve az utánpótlási idő alatt a készlet csökkenésének mértékét is normális eloszlással modellezzük.

A hallgatók figyelmét fel kell hívni arra, hogy ezeknek paramétereit statisztikai mérésekből kapjuk. Azt is fontos jelezni, hogy a normális eloszlás negatív értékeket is felvehet, de ez olyan kis valószínűséggel történne meg, hogy nem vesszük figyelembe.

A statisztikai mérések alapján az L, D változók paramétereinek meghatározására állítunk be csúszkákat, amiket majd az adott alkalmazásnak megfelelően tudunk állítani. Itt figyelembe vehetjük a múltbéli adatok átlagát és szórását. A statisztikától így már csak egy lépésre kerültünk a valószínűségszámítás elméletéhez, a különböző eloszlást követő véletlenszám generáláshoz, ami a sztochasztikus folyamatok szimulációinak alapját képezi majd.

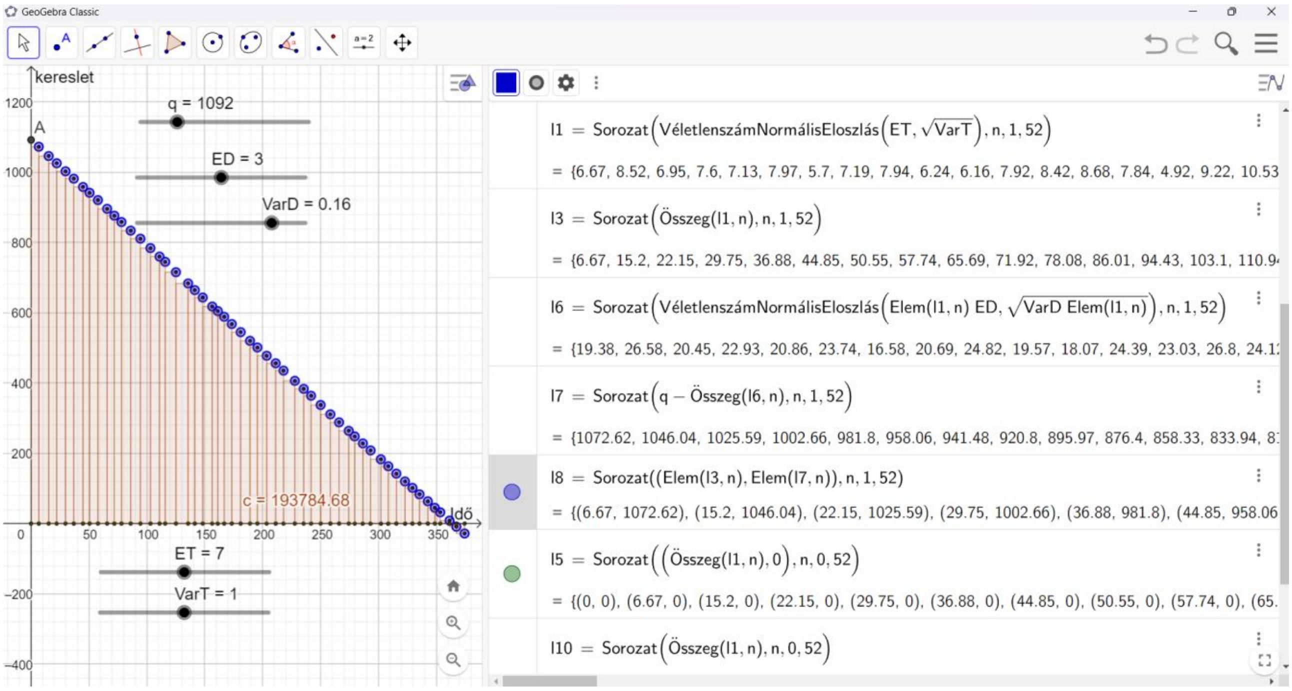
A 7. ábrán láthatjuk a leírt folyamatot. A vízszintes tengelyen a készlet kiértékeléseinek időpontjait jelenítettük meg, egymástól való távolságuk $N(E(T), \sqrt{VarT})$ normális eloszlásból generáltuk.

Az egy időegységre vonatkozóan a keresletetek/fogyásokat D vel jelöljük és a $N(E(D), \sqrt{VarD})$ valószínűségi változóból generáljuk. A függőleges tengelyen az X (kereslet) valószínűségi változó szerint csökken a készlet. Ezt a csökkenést fogjuk modellezni.

Az $X = L \cdot D$ valószínűségi változót a következő eljárással fogjuk szimulálni: Az x tengelyen lévő időintervallumok hosszát a $N(E(T), \sqrt{VarT})$ normális eloszlásból generáljuk. Minden ilyen generált Ti adott intervallumhoz tartozó $Xi = Ti \cdot D$ keresletet a (3) képlet által megadott paraméterekkel rendelkező normális eloszlásból generálunk, ahol a Ti –t determinisztikusnak tekintettük. A kereslet miatti készlet csökkentés látható a 7. ábrán.

Ezzel a szimulációs eljárással éppen azt tudjuk megértetni a hallgatókkal, amit a Wayne Winston könyv [12] 808. oldalán elmulaszt, vagyis úgy szimuláljuk a keresletet az egész T időszakra úgy,

hogy a T_i komponenseken külön generáljuk az Xi keresletet a T_i intervallumok hosszának függvényében. Ezzel pedig megkapjuk, hogy az egész T időszakban $\sum Xi$ lesz a kereslet.
Megjegyezzük, hogy alkalmazásokban feltételezni szokták X normalitását, annak érdekében, hogy egyszerűbben lehessen valószínűségeket kiszámolni. Valószínűségi változók szorzatának a normalitása nem következik abból, hogy a tényezők normális eloszlást követnek, tehát ezt nem célszerű használni. Ezt a feltevést oldotta fel a fenti új szimulációs eljárás.
A 7. ábra egy lépcsőzetes csökkenő függvényt ábrázol, ami a készlet állapotát ábrázolja. Az időintervallum eloszlásának paraméterei állíthatók, úgyszintén az egy időegységre jutó kereslet paraméterei is.
Ennek segítségével egy realizáció alapján könnyen, akár kézzel is meghatározható a szükséges rendelés, ahhoz, hogy ne lépjen fel készlethiány. Továbbgondolva, a szimuláció ismétlése alapján olyan rendelés is meghatározható, hogy egy adott (nagy) valószínűséggel, ne kerüljön sor hiányra.
A modell nagyon könnyen átalakítható olyan modellre is, ahol a készlethiányt megengedjük, úgy hogy a neki megfelelő költséget is meg tudjuk jeleníteni.



7. ábra A véletlen kereslet alakulása egy T utánpótlási időszak alatt

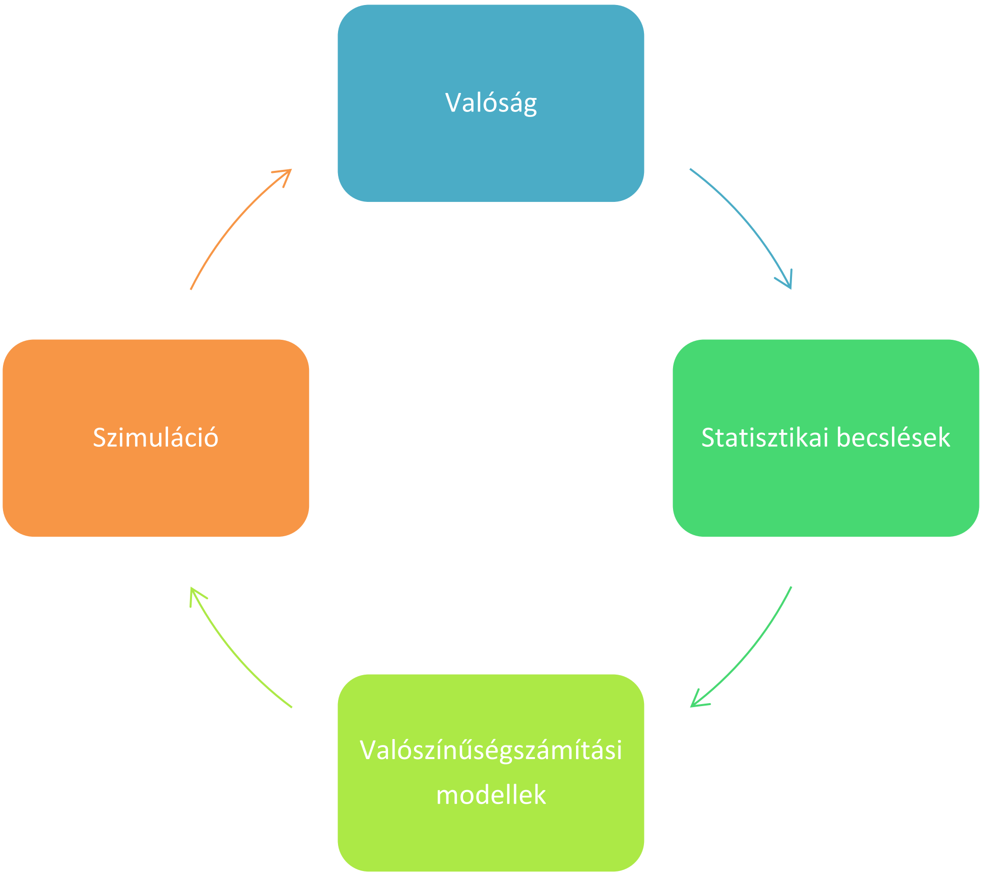
4. Készségek fejlesztése a modellépítés és kísérletezésen keresztül

Fontos szempontnak tartjuk a hallgatók matematikai tantárgyak tanulásának a motivációját, amit erősíteni úgy tudjuk, hogy az új, tisztán matematikai fogalmakat már az alapozó módszertani tárgyak tanításánál a szaktárgyak problémáihoz kapcsolódva ismertetjük.

A bemutatott módszertanon keresztül a hallgatók felismerik a matematikai modellezés fontosságát. A szimulációkon keresztül, amit különböző paraméterek beállításával érnek el látják a modell és a paraméterek kapcsolatát. Továbbá megismerik és megtanulják a paraméterek és változók közötti kapcsolatokat és a fogalmuk közti eltérést is érzékelik.

A sztochasztikus modell által, ahol a szimulációk valószínűségi eloszlásokból keletkeznek, ráéreznek a bizonytalanság természetére és megértik hogyan viszonyul egy minta az eloszláshoz, amelyből véve lett. Nagyon fontos, hogy belátják a bizonytalanság jelenlétét és megismerik azokat

a módszereket, - itt a valószínűségi eloszlás illesztést -, amelyekkel a bizonytalanságot le tudják írni, modellezni tudják és kezelni ezeket.
Speciálisan két készletezési modellt vezettünk be, az első determinisztikus, majd egy sztochasztikus modellt, amely elméleti bár le van írva a Wayne Winston [12]- ben, félrevezető hibákat tartalmaz és zavaros. A modell letisztázásán kívül egy új szimuláción keresztül is feloldottuk a könyvben lévő nehézkes prezentálást.
Az alábbi 8. ábrából látszik, hogyan kapcsolja össze a szimuláció a statisztikai és valószínűségszámítási modellt a valósággal. Ennek köszönhetően a szimuláció egyik fontos feladata az is hogy a valóságot emulálja, további költségek nélkül.



8. ábra. A modellezés és szimuláció folyamata

4. Köszönetnyilvánítás

Ez úton szeretnénk köszönetet mondani a lektoroknak, akik hasznos észrevételekkel, ötletekkel hozzájárultak ahhoz, hogy a cikk jelen formába kerüljön.

Irodalomjegyzék

[1] Bacel Maddah, Nazim Noueihed,EOQ holds under stochastic demand, a technical note, Applied Mathematical Modelling, Volume 45, Pages 205-208, (2017) ISSN 0307-904X, https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.12.026
[2] Bransford, J.D., A.L. Brown, and R.R. Cocking, eds. *How People Learn: Brain, Mind, Experience and School*. National Academies Press. (2000).
[3] Beckmann, M.J., Srinivasan, S.K. An (s, S) inventory system with Poisson demands and Exponential lead time. OR Spektrum 9, 213–217 (1987). https://doi.org/10.1007/BF01719831
[4] Chikán Attila (szerk.) Készletezési modellek Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó Budapest 1983

[5] Choudhary, F. and Javed, T. Use of computer simulations for the understanding and retention of mathematical concepts. International Journal of Innovation in teaching and Learning (Ijitl), 7(2), 70-86. (2021). https://doi.org/10.35993/ijitl.v7i2.857
[6] De Jong, Ton. "Learning and instruction with computer simulations." Education and Computing 6.3-4 (1991): 217-229. https://doi.org/10.1016/0167-9287(91)80002-F
[7] Hertel, J.P., and B.J. Millis. *Using Simulations to Promote Learning in Higher Education*. Stylus Publishing, LLC. (2002).
[8] Porter, T.S., Riley, T.M., and Ruffer, R.L. A Review of the Use of Simulations in Teaching Economics. *Social Science Computer Review*, 22(4), 426-443 (2004).
[9] Rapanta, C., Botturi, L., Goodyear, P. et al. Online University Teaching During and After the Covid-19 Crisis: Refocusing Teacher Presence and Learning Activity. Postdigit Sci Educ 2, 923–945 (2020). https://doi.org/10.1007/s42438-020-00155-y
[10] Shute, V.J., R. Glaser, and K. Raghavan. Inference in Discovery in an Exploratory Laboratory. In P.L. Ackerman, R.J. Sternberg, and R. Glaser (Eds.), *Learning and Individual Differences, Advances in Theory and Research*, New York: Freeman. 279-332. (1989).
[11] Tahami, Hesamoddin, Abolfazl Mirzazadeh, and Aref Gholami-Qadikolaei. "Simultaneous control on lead time elements and ordering cost for an inflationary inventory-production model with mixture of normal distributions LTD under finite capacity." RAIRO-Operations Research 53.4 (2019): 1357-1384 https://doi.org/10.1051/ro/2019060
[12] Winston, W. L.. Operations Research Applications and algorithms. Belmont USA: Thomson Learning Brooks/Cole. (2004)