

# PROBLÉMAMEGOLDÁS A FELSŐOKTATÁSBAN

## PROBLEM-SOLVING IN HIGHER EDUCATION

Nagy Kem Gyula <sup>1/ORCID 0000-0002-0996-9075</sup>, Katona János <sup>2/ORCID 0000-0002-5579-9089</sup>,

<sup>1,2</sup> Ybl Miklós Építéstudományi Kar, Óbudai Egyetem, Magyarország  
<https://doi.org/10.47833/2023.2.CSC.019>

---

### **Kulcsszavak:**

felsőoktatás  
problémamegoldó gondolkodás  
analízis oktatása

### **Keywords:**

higher education  
problem-solving thinking  
calculus education

### **Cikktörténet:**

Beérkezett 2023. szeptember 6.  
Átdolgozva 2023. október 31.  
Elfogadva 2023. november 17.

---

### **Összefoglalás**

Írásunk a problémamegoldó gondolkodás elsajátításával kapcsolatos aktuális kérdésekre keres válaszokat, főként a matematika oktatására vonatkozóan. Kérdéseink: A problémamegoldó gondolkodás képességének fejlesztése valós cél? Mit vár el a fenntartó, a vezető, a MAB? Mit várnak el diákjaink? Mit vár el a szakma a végzős diáktól? Az elvárásoknak (oktatás, nevelés, tananyag fejlesztés, kutatás, publikálás, kapcsolatépítés, adminisztráció) nehéz megfelelni. A válaszok keresése során kitérünk a tananyagra és a kapcsolatos követelményekre, valamint az előismeretekre. Érintjük az analízis (kalkulus) alapjainak szükségességét. Az oktatás és a követelmények megállapítása során a felsorolt kényszereknek engedelmességgel és etikussal kell maradnunk.

### **Abstract**

Our article seeks answers to current questions related to the acquisition of problem-solving thinking, mainly regarding the teaching of mathematics. Our questions: Is the development of problem-solving thinking a real goal? What do the maintainer, the manager, and the MAB expect? What do our students expect? What does the profession expect from the graduate student? It is difficult to meet the expectations (education, upbringing, curriculum development, research, publication, relationship building, administration). In the search for answers, we cover the curriculum, related requirements, and prior knowledge. We consider the need for the basics of analysis. We must remain ethical by obeying the listed constraints during education and establishing requirements.

---

## **1. Bevezetés**

Írásunk a problémamegoldó gondolkodás elsajátításával kapcsolatos aktuális oktatási kérdésekre keres választ, főként a matematika felsőfokú oktatására vonatkozóan. A felvetett kérdések, megállapítások az informatika, a fizika és más tárgyra vonatkozóan is helytállóak. A középiskolás tantervek folyamatos változtatásának következtében létrejött minőségromlást a COVID folytán bevezetett intézkedések fokozták. A csak középszintű matematika érettségivel rendelkezők tudása nagyon eltérő (szemben az emeltszintű érettségivel rendelkezők tudásához képest, hiszen utóbbi egy központilag erősen felügyelt mérés eredménye) [7, 10-13].

Tanulmányaikat a műszaki, gazdasági felsőoktatásban folytatók közül az egyes intézmények szintfelmérői során kiderül, hogy a középiskolás tananyag ismerete hiányos, általában a dolgozatok egy lényeges része nem éri el még az érettségi elégséges szintjét sem. Az ismeretek pótlása a felsőoktatás alapfeladatává vált, viszont a megfelelő erőforrások nem feltétlenül biztosítottak. Egyes

intézmények az ismeretek pótlását a felsőoktatási tanterv matematika tárgyainak keretében próbálják megoldani, ez a felsőoktatáshoz tartozó matematika oktatást korlátozza.

Más intézmények egyéb tárgyak tanmenetébe pl. tanulás, kutatás módszertan stb. próbálnak középiskolai matematikai ismereteket is oktatni. Erre kiválóan alkalmasak Pólya művei [14,15]

Vannak intézmények, amelyek (közép szintű) matematika kurzust (-okat) próbálnak beiktatni a felsőoktatási matematika kurzusokkal párhuzamosan, és vannak néhányan, amelyek ezt csak sorosan engedik (a középfokú kurzus megelőzi a felsőfokút, legalábbis matematikából).

Középiskolában oktatott és az érettségi elégségeshez kapcsolódó ismeretek azért szükségesek a felsőoktatásban, hogy legyen egy közös nyelv hallgatóinkkal, kollégáinkkal, amelyen tudunk egymással értekezni; Galilei szerint: *A természet nagy könyve a matematika nyelvén íródott.*

Például a százalékszámítás esetén azért, hogy az elért pontszámából diákjaink megállapíthassák az érdemjegyüket, ha az százalékosan van meghatározva (nem hinnénk, de ezzel is kell foglalkoznunk). Ezért az érettségi elégséges szint alatt teljesítő hallgatónak egyik felsőoktatási kurzust sem szabadna felvennie; hiszen, ha nem szükséges hozzá az érettségi szint, akkor miért felsőoktatási a kurzus.

Megállapíthatjuk, hogy matematika elégséges érettségi szintjének elérése, szinten tartása szükséges feltétele a felsőoktatásnak. Etikusan akkor járunk el, ha ezt megköveteljük diákjainktól, kollégáinktól és önmagunktól. Eddig a problémamegoldás oktatásának egyik, de talán legszükségesebb feltételéről a középfokú matematikáról, mint közös nyelvről esett szó.

## 2. Problémamegoldó (Pm: problémamegoldó) Gondolkodás

„Remélem, hogy életem végéig diák maradok.”

Csehov

A Pm (Problémamegoldó) gondolkodásunk fejlesztése elengedhetetlen feltétel; a Pm gondolkodás fejlődése 20-as éveink elején hanyatlásnak indul [1,16]. A Pm gondolkodás a közoktatási időszakban fejleszthető. [1-3]. Felsőoktatásunk és hasonlóan munkahelyeink nem igazán kényszerítik gondolkodásra diákjainkat dolgozóikat (van kivétel). A Pm gondolkodást követelő oktatás nehézségeit kevesen vállalják [2,3,6,8]

Kérdések:

- A Pm gondolkodás képességének fejlesztése valós cél?  
A kérdésre a 2.1 fejezetben ismertetett feladat kapcsán leírtakkal válaszolunk.
- Mit vár el a fenntartó, a vezető, a MAB?  
„Az oktatás a jövő kihívásaira, az alapvető globális és hazai trendekre akkor készíti fel a hallgatókat, ha minden értelemben az interdiszciplináris és probléma-orientált, problémamegoldó gondolkodásra és teamekben való munkára készíti fel a hallgatókat” [4].  
A vezetők elvárásait általában a nemzeti felsőoktatásról szóló törvény, az intézményi SzMSz és MAB követelményei tartalmazzák, ezeket alkalom adtán ellenőrzik is.
- Mit várnak el diákjaink?  
„A kettést”..., ennél szerencsére árnyaltabb a kép. A gyengék valóban csak a kettést szeretnék, hiszen így minimális munkával maximális haszonra tesznek szert a diploma megszerzését illetően. Néhányan többet szeretnének kapni, ezért teljesítenek is, és elvárják, hogy a használható tudás birtokában a gyengébbekhez képest előnyhöz jussanak.  
Hivatkozhatunk az 1-es táblázatra, amelyben a felsőoktatásban végzettek a mesterjelöltre vonatkozó megállapítások lennének elfogadhatók [9].  
A felsőoktatásban végzett diák elvárja a hétszámjegyű fizetést is (Magyarország, 2023, bruttó, forintban) hiszen egy hasonlókorú szakmunkás is ennyit keres. Ezt azonban csak a legkiválóbbak tudják elérni, akiknek szakmai kompetenciája már nagymesteri szinthez közeli az 1. táblázat szerint. Nemzetközi viszonyok között nagyságrendi különbségek is lehetnek.
- Mit vár el a szakma a végzős diáktól?  
Segítse a szakmai munkát. Tudjon önállóan dönteni, és ha nem tudna, akkor kérjen segítséget.
- Mit várunk el mi Tőlük?  
A tárgy és a szakma iránti kíváncsiságot.

Elképzelhetjük a diák és tanára viszonyát, mint a beteg és orvosa közötti kapcsolatot, mely Hippokratész szerint a következő „*mindent elhárítok, ami ártana nekik*”. Ezt a kijelentést ma már az orvosi gyakorlat is felülírja, hiszen nem “fektetik” a beteget, hanem inkább edzik, hogy újra egészséges legyen. Az oktatási gyakorlat is hasonló, mégis más, hiszen egyre magasabbra emeljük a léceket, amit diákjaink kedvéért teszünk, hiszen mesterjelöltnek jelentkeztek hozzánk és szeretnék elérni azt a szintet. A Pm gondolkodás fejlesztése során a megfelelő feladatok kitűzése azt jelenti, hogy megadjuk a hallgatónknak azokat a problémákat, amelyeket erőfeszítések árán még éppen meg tudnak oldani. Csak rutin feladatokkal nem fejlődik a Pm képességük. Mentális modellek, illetve kognitív sémák [9] segítségével oldunk meg problémákat, ezek birtoklása szerinti csoportosítást látunk az 1. táblázatban, amelyet először a sakkozók gondolkodási sémáinak mennyisége szerint állítottak össze, az egyes szintek elnevezése ennek következménye.

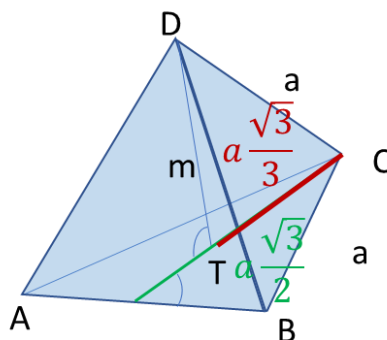
1. Táblázat. szakmai kompetencia szintjei [9] alapján

	<i>Kezdő</i>	<i>Haladó</i>	<i>Mesterjelölt</i>	<i>Nagymester</i>
Sémák száma	10-30 +ált séma	100-300 és kevert	1000-3000	10000-30000
Szakmai nyelve	Nincs	Nehézkes	Szabályszerű	Anyanyelvi
Tudatosság szintje	Még nem tudja, mit nem tud	Már tudja mit nem tud még	Racionálisan következtet	Intuitíven felismeri a helyénvalót
Érés ideje	-	Néhány év	Kb. 5 év	10 év

## 2.1. Egy tanulságos feladat (GFGY 2017 [5])

Egy kőgúla 30 cm-es élű szabályos tetraéder. Mindegyik lapját 3 cm-es vastagságban le kell csiszolni. Mennyivel csökken a súlya?

- Mindegyik lapját 3 cm-es vastagságban le kell csiszolni. Az első lap lecsiszolása után a test önmagához hasonló kisebb szabályos tetraéder lesz, melynek magassága 3 cm-rel rövidebb az eredeti magasságnál. (A közös nyelv következtében elvárható, hogy a „lapját 3 cm-es vastagságban le kell csiszolni” kérésen pontosan ezt értsük; és pl. nem azt, hogy a test éle lesz 3 cm-rel kisebb). Jelenlegi középiskolás szinten ez a szövegezés talán már kifogásolható lenne, de mérnöki szinten nem az.
- A test  $m$  magasságának meghatározása. Középiskolai ismeretek alapján egy lehetséges megoldást mutatunk, de függvénytáblázatból is kiolvasható; míg az előző megállapítás nem szerepel a függvénytáblázatban.



1. ábra. A középiskolában használt GFGY 2017-es feladata

- Az ABC szabályos háromszög magassága:  $\frac{\sqrt{3}}{2} a$
- $TC = \frac{2\sqrt{3}}{3} a = \frac{\sqrt{3}}{3} a$  mivel a szabályos háromszög súlypontja és magasságpontja azonos

- A CTD derékszögű háromszögre vonatkozó  $(a \frac{\sqrt{3}}{3})^2 + m^2 = a$ , Püthagorasz tételből  

$$m = \sqrt{\frac{2}{3}a} \sim 24,49$$
 adódik
- A magasságot csökkenteni kell 3 cm-rel.
- Ezután valamelyik oldallapot kiválasztva a szabályos tetraéder szimmetriája miatt, ezt a csökkentést meg kell ismételni, majd még kétszer meg kell ismételni.
- Utóbbi pontok következtében ugyanazt az eredményt kapjuk, mintha az eredeti magasságot 12 cm-el csökkentenénk. Gyakorlatilag felezni kell a tetraéder magasságát.
- Majd az eredeti kő térfogatából kivonjuk a kapott kő térfogatát és ezt szorozzuk a kő fajsúlyával; vagy sűrűségével és a nehézségi gyorsulással.

A feladat megoldása kellően összetett, de egyik lépése sem haladja meg a középiskolában oktatott tananyagot.

### 3. Problémamegoldó Gondolkodás mérnök hallgatóknak

Az előző feladatot áthelyezzük egy másik környezetbe. Legyen *A*: a megrendelő (a táblázat szerinti kompetencia szintje bármelyik lehet), *B*: mérnök mesterjelölt (közvetítő a megrendelő és a szakmunkás között), *C* szakmunkás haladó.

*A* mint megrendelő, a feladatnak megfelelően 10 db kő átalakítására kér árajánlatot *B*-től.

Nézzük a folyamat lehetséges eseményeit:

*B* gondolkodó ember, aki tanult matematikát is, ezért:

1. elvégzi a 2.1-ben található számolást.
2. Majd specifikálja a megrendelést, hiszen felmerül benne, hogy egyetlen oldallapnak a csiszolásával a szabályos tetraéder mindegyik oldalához tartozó magasság csökken, és ez talán elkerülte *A*, mint megrendelő figyelmét. Kiderül, hogy nem kell mindegyik lapot 3 cm-rel csiszolni, elegendő egy polírozás mindegyik oldalra, viszont a köveknek tényleg közel feleakkora magasságú szabályos tetraédereknek kell lenniük, mintha 3 cm csiszolnának le mindegyik oldallapon.
3. Ennek tudatában *B* megkéri *C*-t, hogy három tetraéder mindegyik sarkát vágja le (csonkolja) az élék felezéspontján átmenő síkkal. (vannak olyan szerszámok, amelyekkel ez megtehető). Így kap 12 db megfelelő méretű követ és megmarad hét eredeti és kettő feleakkora. *A* igénye szerint átadja a köveket.
4. Gondoljuk meg (nagymeisteri szint), ha 6 mm élhosszú drágakövekről (gyémánt) szólna a feladat, akkor két eredetiből is csonkolható a szükséges 10 darab 3 mm élű tetraéder, melynek darabja közel százezer forint, ellenben az eredeti kövek hárommillió forintra tehető árával.

Így *B* mérnökünk 24 millió forintos ötlete előnyt élvez esetleges matematikában járatlan versenytársával szemben. *B* szerepe hasonló folyamatokban csak abban az esetben elengedhetetlen, ha képes a fentihez hasonló döntésekre.

### 4. Analízis (Kalkulus) oktatás

Felsőoktatásban az analízis oktatásának szükségességét kevesen vitatják. Hiszen ezek bizonyos eredményeit már Arkhimédész is ismerte és használta pl. a parabola szeletek területére vonatkozóan. Bolzano és Cauchy formalizálták Newton és Leibniz eredményeit, és ezek oktatása a 20 század végére már a középiskolákban is elterjedt, fogyaszthatóvá vált. Megalapozása a számsorozat határértékének fogalmára épül. Évtizedek során végzett hallgatóink képesek voltak *megérteni* a határérték definícióját, amit pl. a következő feladattal tesztelhetünk:

1. Feladat: Legyen az  $a_n = 3 + (-1)^n$ . Megadható-e olyan *A* szám, amelynek 0,5 sugarú környezetén kívül a sorozatnak csak véges sok eleme található.

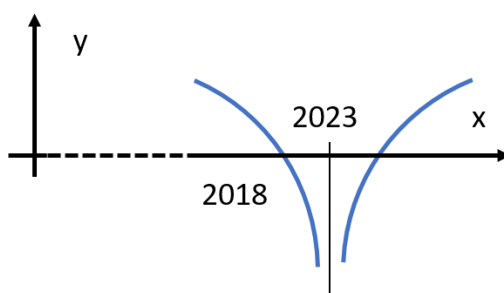
Egy lehetséges válasz a következő: mivel a sorozat a 2 számot végtelen sokszor felveszi, ezért *A* a 2 számtól legfeljebb 0,5 egységnyire lehet, azaz  $A \in [1,5; 2,5]$ , hasonlóan a 4

számtól is legfeljebb 0,5 távolságra lehet, azaz  $A \in [3,5; 4,5]$ , mivel a két intervallumnak nincs közös része, ezért nem adható meg megfelelő  $A$  szám.

Ezt a feladatot a sorozatos óra elvonások miatt már nem lenne etikus feladni, mivel a definíció megértéséhez szükséges feladok egy részére már nem jut idő. A tananyag csökken így a kapcsolatos követelmények is, formálisabbá válik a számonkérés is, néha csak a definíció szövegére korlátozódik. Nézzünk egy ilyen feladatot, az elméleti tananyag kapcsán.

2. Feladat: Írja le az  $f(x)$  függvény  $-\infty$ -hez tartó helyen hatérték definícióját, vázolja fel egy ilyen függvény grafikonját.

A kérdés második felére válaszolva vázoltuk egy ilyen függvény grafikonját a 2. ábrán. Érezhetünk analógiát matematika oktatásunk hanyatlásával kapcsolatban, ha tekintjük e függvény bal oldali környezetét a 2023 helyen. Hiszen, ha az  $x$  tengelyen az időt években, az  $y$  tengelyen az „oktatásunk színvonalát minősítő elképzelt testület” által bármely pillanatban számított érték  $e$  alapú logaritmusát látjuk, a 0 nívó a 2018-as év valamely pillanatában szolgáltatott érték, a  $-\infty$  annak a nehezen elképzelt állapotnak felel meg, hogy nincs semmilyen oktatás.



2. ábra. A 2. feladathoz tartozó egy lehetséges függvény grafikonja

Csak reménykedhetünk abban, hogy eljön az idő, hogy a 2023 jobb oldali környezetében is teljesül az analógia.

Magánbeszélgetések során többen azt vizualizálják, hogy a színvonalcsökkenésnek nincs alja, alsó határa. Mint láthatjuk az ábrázolt grafikon szerinti optimista scenárió esetében még ez a pesszimista várakozás is teljesülhet, csak lennének már a görbe emelkedő részén.

Vagy hátradőlünk, vagy meghajolunk, sajnos nagyon nehéz egyenes gerinccel megállnunk! Különösen önmagunk előtt, különösen, ha nem teszünk azért, hogy jobb legyen. Folytatnunk kell, mert a fennmaradáshoz a további minőségromlás felszámolásához, az esetleges sikerhez, mint a geometriához, ahogy Eukleidész is mondta: „nincs királyi út”. Azt erősen művelni kell.

Az elvárásoknak (oktatás, nevelés, tananyag fejlesztés, kutatás, publikálás, kapcsolatépítés, adminisztráció) nehezen tudunk megfelelni. Végezzük a munkánkat: tanítjuk a tananyagot, figyeljük a reakciókat, ha kell alternatív magyarázatot adunk, példák, ellenpéldák, vizualizálás, tesztelünk, javítunk, szofisztikált magyarázatok, precíz definíciók mellett (vagy sajnos helyett) inkább számukra is érthető példákkal is megelégszünk.

Nevelünk: a korrektség, az egyenlőség alapvető, a viselkedésünk talán követendő, ha én készülok talán Ő is készül, ha én pontos vagyok talán Ők sem késnek.

Az oktatás és a követelmények megállapítása során etikusnak kell maradnunk. Hogyan? Vannak példaképek, Mesterek, akiktől mi is tanulhatunk. Talán diákként kell gondolkodnunk, éreznünk, ahogyan Csehov is remélte.

## Irodalomjegyzék

- [1] Avolio, Bruce J.; Waldman, David A.: Variations in cognitive, perceptual, and psychomotor abilities across the working life span: Examining the effects of race, sex, experience, education, and occupational type. *Psychology and Aging*, Vol 9 (3), Sep 1994, 430-442. <https://doi.org/10.1037/0882-7974.9.3.430>
- [2] Bérces R. The Improvement of Higher Education Quality and Talent-Nurturing with Scientific Students' Association (SSA) Commitment. *Acta Polytechnica Hungarica* Vol. 12, No. 5, 2015
- [3] Dinya, L. (2005): A felsőoktatás marketingkihívásai, Marketingoktatás és kutatás a változó Európai Unióban, Szent István Egyetem, Győr, MOK konferencia.

- [4] Fokozatváltás a felsőoktatásban:  
<https://2015-2019.kormany.hu/download/d/90/30000/fels%C5%91oktat%C3%A1si%20koncept%C3%B3.pdf> 16p.  
Letöltve 2023. 09.01.
- [5] Horvay-Reimann: Geometriai feladatok gyűjteménye, 2017-es feladat
- [6] Jäckel K. 2010. Frontvonal audit a felsőoktatásban, a felsőoktatás konfliktushelyzeteinek feltárása. Doktori értekezés, Gödöllő 2010
- [7] Katona, János; Takács, Anna; Nagy Kem, Gyula Matematikai versenyeink és a problémamegoldó gondolkodás In: Temesvári, Zsolt; Wüthrl, Tibor; Molnár, György (szerk.) XXXVIII. Kandó Konferencia 2022 - Kiadvány kötet Budapest, Magyarország : Óbudai Egyetem, Kandó Kálmán Villamosmérnöki Kar (2022) 419 p. pp. 355-364., 10 p.
- [8] Kozma T, A minőségbiztosítás szerepe és fejlesztése a felsőoktatási intézményekben és annak hallgatói értelmezése a gyakorlatban, Doktori értekezés. 208 p.
- [9] Mérő L. 2008. Észjárások-remix, Tericum, Budapest. 165p.
- [10] Nagy Gy. 2003. Tudományok katalizátora, a KöMaL. Magyar Tudomány, 11, p. 1455.  
<http://www.matud.iif.hu/03nov/016.html>
- [11] Nagy Gy. 2015. A problémamegoldás megismerésének magyar módszere MATEMATIKAI LAPOK 21:(2) 44-56.
- [12] Nagy Gy. 2017 Developing Problem-solving Skills. Mathematics Competition 29 (2), 26-41  
<http://www.wfnmc.org/Journal%202016%202.pdf#page=31>
- [13] Nagy Kem, Gyula ; Katona, János Matematikai Versenyeink MATEMATIKAI LAPOK 2017-2018/1 pp. 1-34. , 34 p. (2021)
- [14] Pólya Gy. 1945, How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method. Princeton University Press, 1945. magyarul: A gondolkodás iskolája, Gondolat Kiadó. 1969
- [15] Pólya Gy. 1962. Mathematical Discovery. On understanding, Learning, and Teaching Problem Solving, John Wiley and Sons, Magyarul: A problémamegoldás iskolája, Tankönyvkiadó. 1985.
- [16] Salthouse TA. 2009. When does age-related cognitive decline begin? Neurobiol. Aging 30:507–14  
doi: [10.1016/j.neurobiolaging.2008.09.023](https://doi.org/10.1016/j.neurobiolaging.2008.09.023)