

MIÉRT HATÉKONY A FIZIKAI GONDOLKODÁS – KEPLER III. TÖRVÉNYÉNEK HAT ASPEKTUSA

WHY PHYSICAL THINKING IS EFFECTIVE - SIX ASPECTS OF KEPLER'S LAW III

Nagy Péter⁰⁰⁰⁹⁻⁰⁰⁰¹⁻⁰²⁶⁹⁻⁰⁷²⁵ ^{1*}

¹ Alaptudományi Tanszék, GAMF Műszaki és Informatikai Kar, Neumann János Egyetem Egyetem,
Magyarország

<https://doi.org/10.47833/2023.2.CSC.013>

Kulcsszavak:

Kepler III. törvénye
elmélet
tapasztalat
szimuláció

Keywords:

Kepler's Law III
theory
empirical research
simulation

Cikktörténet:

Beérkezett 2023. szeptember 21.
Átdolgozva 2023. október 31.
Elfogadva 2023. november 6.

Összefoglalás

A fizika kivételes hatékonyságát a világ megértésében az adja, hogy egyrészt több eltérő elvi út mentén matematikailag szabatos elméleti modelleket kínál, másrészt nagyon pontos kísérleti eredményeket produkál és e két vonatkozás egymást erősítve és segítve halad előre a mind pontosabb leírás felé. A fizika erejét és megbízhatóságát mutatjuk be azáltal, hogy hat teljesen különböző módon tudunk eljutni Kepler III. törvényéhez.

Abstract

The exceptional effectiveness of physics in understanding the world is that it offers mathematically rigorous theoretical models along a number of different paths, and also produces very precise experimental results, and these two aspects reinforce and help each other to progress towards ever more precise descriptions. The power and reliability of physics is demonstrated by six very different ways of arriving at Kepler's Law III.

„Ha már Ádám evett a tudás fájáról, evett volna eleget!” (Kner Izidór)

„Két oszlop emeli az emberi létet, az egyik a segítőkész részvét, másik a tudás. A tudás részvét nélkül embertelen, a segítőkészség tudás nélkül tehetetlen.” (Victor Weisskopf)

A világ megismerésére való törekvés biológiai eredetű: az evolúció során azok az élőlények bizonyultak sikeresnek, amelyek a környezetük minél pontosabb tükörképét alakították ki tudatukban. Ez a törekvés az emberben teljesedett ki a természettudományok által. Erre motiváló tudásvágyra utal fenti első idézetünk.

A természettudományok társadalmi hasznossága a természeti törvények erejének, megbízhatóságának folyománya, mivel így vezetnek – mérnöki manifesztációkon keresztül – a mindennapi élet szinte minden területén az életünket megkönnyítő fejlesztésekhez (pl. lámpák, háztartási gépek, erőművek, autók, repülőgépek, hajók, számítógépek, projektorok, 3D-mozik, digitális fényképezőgépek, orvosi diagnosztikai gépek, gyógyszerek, műtéti eljárások stb.). Ezt a humánus haszonelvűséget fejezi ki fenti második idézetünk.

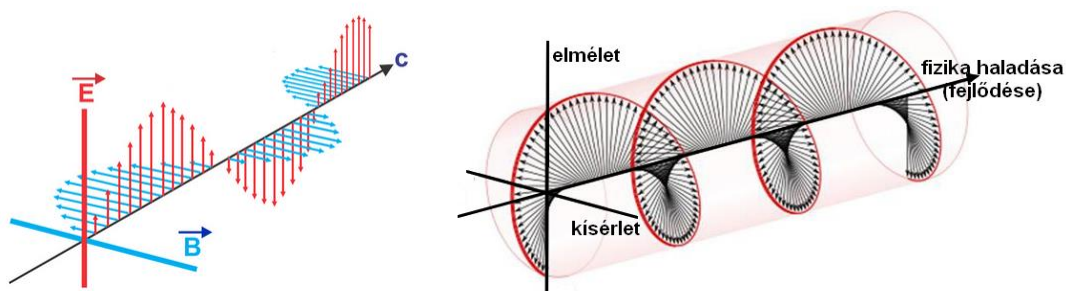
A természettudományos megismerés folyamata ([1] alapján, lépésekre bontva):

* Kapcsolattartó szerző.
E-mail cím: nagy.peter@nje.hu

- A természettudományos megismerés a jelenségek felismerésével kezdődik. Ennek érdekében a jelenséget először közvetlen tapasztalatból, vagy műszeres eszközzel, méréssel figyeljük meg.
- A megfigyelt jelenség értelmezésére fogalmakat vezetünk be.
- Amikor csak lehet, a lényegtelen körülmények elválasztása érdekében kísérleteket végzünk. A kísérletek azonos feltételek mellett többször ismételhetők, bárki által ellenőrizhetők, s mindez a pontosabb megértést szolgálja.
- Ezután kapcsolatokat keresünk a fogalmak között. A mennyiségi fogalmak között a kapcsolat matematikai jellegű.
- E feltételezett kapcsolatok megtalálása újabb megfigyelésekkel, kísérletekkel történhet. A fogalmak között először hipotetikus kapcsolatok fogalmazódnak meg. A versengő hipotézisek közül kiesik az, amely következetesen ellentmond a megfigyeléseknek, kísérletnek.
- A végül érvényben maradó letisztult kapcsolatokat természeti törvényeknek nevezzük. A törvények – megfelelő matematikai jelöléssel, – meglepően tömör formában néhány egyenlettel összefoglalhatók. A törvények léte azt bizonyítja, hogy a természet sajátos, lényegi rend szerint működik, és a természet ennek felkutatása révén megismerhető.

A fizika kivételes hatékonyságát és erejét a világ megértésében az adja, hogy egyrészt több eltérő elvi út mentén matematikailag szabatos elméleti modelleket kínál, másrészt nagyon pontos kísérleti eredményeket produkál és e két vonatkozás egymást erősítve és segítve halad előre a mind pontosabb leírás felé.

Ezen utóbbi kölcsönös erősítő hatás jól szemléltethető egy az elektromágneses hullám terjedésével való analógián.



1. ábra. Az elektromágneses hullám terjedésének és a fizika fejlődésének analógiája

Egy közegben terjedő elektromágneses hullámban az elektromos és a mágneses térerősség "egymásba alakul át", hiszen az időben változó elektromos tér hozza létre a mágneses indukciós teret, míg a változó indukciós tér generálja az elektromos teret. Analóg módon a fizika haladása az elmélet (matematika) és kísérlet (empíria) egymásra épülésével, kölcsönösen erősítésével mintegy spirális fejlődési ívként értelmezhető.

A fizikai világ egyik legalapvetőbb mozgásformája a centrális erőterben történő mozgás, illetve annak egy speciális esete a bolygómozgás, azaz bolygók keringése egy csillag körül. A fentiek illusztrálására jelen tanulmányban a bolygómozgás egyik alapvető törvényszerűségének, konkrétan Kepler III. törvényének tárgyalását mutatjuk be hat különböző megközelítésben: (1) tisztán empirikus módon csillagászati mérések alapján, (2) félig empirikus félig elméleti módon egy gondolatkísérlettel, (3) dimenzióanalízissel a mértékegységekre vonatkozó megfontolással, elméleti úton tisztán matematikai levezetésekkel a (4) Newtoni, illetve (5) Lagrange-féle formalizmusban, és végül (6) számítógépes kísérleti fizika alkalmazásával.

1. Csillagászati megfigyelések (tisztá empiria)

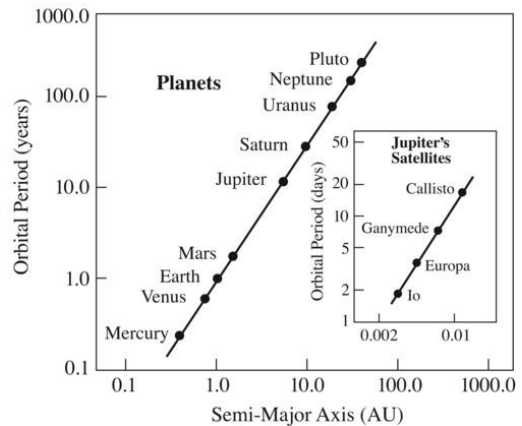
Johannes Kepler saját és Tycho Brahe távcsöves csillagászati adatainak gondos tanulmányozásával és elemzésével összefüggést talált a bolygók keringési ideje és a Naptól való távolságuk között, amelyet ma Kepler III. törvényének nevezünk: a bolygók Naptól való átlagos

távolságainak (az ellipszispályák a fél nagytengelyének) köbei úgy aránylanak egymáshoz, mint a keringési idejük (T) négyzetei, azaz:

$$\frac{a^3}{T^2} = K = \text{állandó} \Rightarrow a^3 = K \cdot T^2 \quad (1.1.)$$

Ezt a törvényt az 1619-ben írt Harmonices Mundi ("A világ harmóniája") című művében közölte.

Bolygó	a [millió km]	Keringési ideje (év)
Merkur	58	0,241
Vénusz	108	0,615
Föld	150	1
Mars	228	1.88
Jupiter	778	11,8
Szturnusz	1426	29,45
Uránusz	2869	84
Neptúnusz	4500	164



2. ábra. A Naprendszer bolygóinak adatai és log-log skálájú ábrázolásuk

A (log-log skálázású) grafikon egyenesének meredekségéből meghatározható K állandó (Naprendszerre érvényes) empirikus értéke:

$$K \cong 3,35 \cdot 10^{18} \frac{m^3}{s^2} \quad (1.2.)$$

2. Gondolkísérlet (hipotézis igazolása megfigyelésre alapozva gondolati úton)

„A modellek, különösen a gondolati modellek alkalmazása a tudományos megismerés elméleti szintjén gyakran egy sajátos kutatási eljáráshoz kapcsolódik, amit általában *gondolkísérletnek* szokás nevezni. A gondolkísérlethez — az elméleti modellhez és a hipotézishez hasonlóan — mindenekelőtt az empirikus tényanyag elméleti feldolgozása, a tudományos elmélet kiépítése és valóságra való vonatkoztatása során folyamodnak, hiszen e módszer lényegi sajátosságait és funkcióit tekintve is összekötő kapocs, átmenet a (reális) kísérlet és a tudományos elmélet között. ...A gondolkísérlet olyan elméleti tevékenység, amely a gondolatok mozgásának formájában gondolatilag mintegy leír, eszmeileg reprodukál bizonyos, technikailag még meg nem valósítható, vagy általában gyakorlatilag megvalósíthatatlan, de elvileg lehetséges, a tudományos tényekkel és az alapvető tudományos törvényekkel összhangban álló reális kísérletet.” [2].

A gondolkísérletek jelentős szerepet játszottak a fizika történetében: gondoljunk pl. Akhilleusz és a teknősbéka versengésére, Galilei dialógusaira, Newton forgó vödörös okfejtésére az inerciarendszer vonatkozásában, a Carnot-körfolyamat idológójára, a csodás Maxwell-démonra, Schrödinger hírhedt macskájára, a varázslatos EPR paradoxonra (2022-es fizikai Nobel-díj), stb.

Nos, vigyünk végig mi is egy gondolkísérletet a Kepler III. törvényével kapcsolatosan. Tegyük fel tehát, hogy a Naprendszerre vonatkozó csillagászati megfigyelések alapján felállítottuk adott középpont körül körpályán (általánosabban és szabatosabban centrális erőterben) mozgó anyagi objektumokra érvényes:

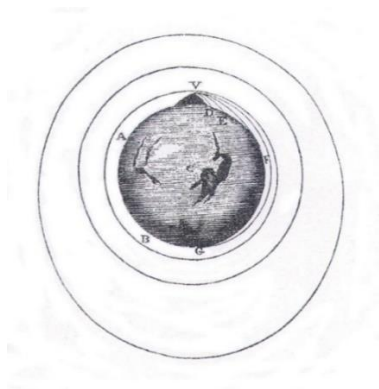
$$\frac{R^3}{T^2} = K = \text{állandó} \quad (2.1.)$$

hipotézisünket.

Ha ez valóban természeti törvény, akkor kézenfekvő továbblépés az, hogy a Föld körüli mozgásra is alkalmazható. Tegyük ehhez hozzá további mérési eredményeket: a Hold mozgására megállapított $T_H = 27,32$ nap $= 2,36 \cdot 10^6$ s keringési időt és $R_H = 3,84 \cdot 10^8$ m (átlagos) keringési távolságot.

A Hold adataiból a Föld körüli mozgásra a K konstans értéke:

$$K_F = \frac{R_H^3}{T_H^2} = \frac{(3,84 \cdot 10^8 \text{ m})^3}{(2,36 \cdot 10^6 \text{ s})^2} = 1,017 \cdot 10^{13} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2} \quad (2.2.)$$



3. ábra. Newton rajza a Föld körül mozgó „elhajított” testek pályáiról

Ha a Föld felszíne közelében (pl. egy hegyről) vízszintesen kilövünk egy testet (lásd Newton vázlatát az ábrán), akkor egy adott pályán fog mozogni, kis sebességek esetén parabolapályán, kellően megválasztott sebesség esetén körpályán. Ezen test — nevezzük kisholdnak (közvetlen a Föld felszíne felett keringő képzeletbeli holdacska) — pályájának sugara tehát (közelítőleg) a Föld sugara, tehát:

$$R_{kh} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m.}$$

Keringési idejét pedig kiszámíthatjuk a hipotézisünkből:

$$\frac{R_{kh}^3}{T_{kh}^2} = K_F = 1,017 \cdot 10^{13} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2} \Rightarrow T_{kh} = \sqrt{\frac{R_{kh}^3}{K_F}} = \sqrt{\frac{(6,37 \cdot 10^6)^3}{1,017 \cdot 10^{13}}} = 5041 \text{ s} \quad (2.3.)$$

A körpályán mozgó kishold centripetális gyorsulása:

$$a_{cp} = \omega^2 \cdot r = \left(\frac{2\pi}{T_{kh}}\right)^2 \cdot R_{kh} = \left(\frac{2\pi}{5041}\right)^2 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9,89 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (2.4.)$$

A centripetális gyorsulás definíció szerint a középpont, tehát jelen esetben a Föld középpontja felé mutató gyorsulás, azaz nem más, mint a (Galilei mérései óta jólismert) Föld felszíni gravitációs gyorsulás $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, ami a számolás során alkalmazott kerekítési hibákon belül egyezést mutat! Milyen elegáns, kerek, önkonzisztens gondolatmenet és eredmény!

3. Dimenzióanalízis (mértékegységekre vonatkozó elméleti megdölgölás)

A fizikai mennyiségek numerikus értékből és mértékegységből állnak. A mértékegység utal a fizikai mennyiség dimenziójára. Szükségszerűen minden fizikai törvényt, összefüggést kifejező egyenlet két oldalán azonos dimenziójú mennyiségek állnak. Ez sokszor igen erős megszorítást jelent az adott összefüggés alakjára. A dimenzióanalízis első lépéseként gondosan meg kell vizsgálni, hogy a keresett egyenletben milyen mennyiségek szerepelhetnek. Csak akkor működik jól a módszer, ha viszonylag kevés, különböző dimenziójú mennyiség között keresünk összefüggést.

Egy másik megkötés, hogy ezzel a módszerrel csak hatványfüggvény szerinti összefüggések kaphatóak meg [3].

A mértékegységekre vonatkozó megfontolások (dimenzióanalízis) és elemi fizikai gondolkodás alapján írjuk fel Kepler III. törvényét!

Alapvető fizikai megfontolások alapján egy bolygó T keringési ideje, ha egy M tömegű csillag körül kering a fél-nagy tengelyű ellipszis pályán az alábbi mennyiségektől függ (megadjuk az SI mértékegységüket is):

- a bolygó pályája-ellipszisének a fél-nagy tengelyétől ($[a] = m$),
- a csillag M tömegétől ($[M] = kg$),
- és a G gravitációs (Cavandish) állandó értékétől ($[G] = \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$).

Keressük tehát a T keringési időt az:

$$T = C \cdot a^\alpha \cdot G^\beta \cdot M^\gamma$$

hatványfüggvény alakban (ahol C mértékegység nélküli állandó)!

Ez a mértékegységekre vonatkozóan az alábbi előírást adja:

$$[T] = [a]^\alpha \cdot [G]^\beta \cdot [M]^\gamma, \text{ azaz: } s = m^\alpha \cdot \left(\frac{m^3}{kg \cdot s^2} \right)^\beta \cdot kg^\gamma.$$

Ez tulajdonképpen három egyenlet a benne előforduló három SI alapegységre:

méter: $0 = \alpha + 3\beta$, másodperc: $1 = -2\beta$, kilogramm: $0 = -\beta + \gamma$.

Ez az egyenletrendszer pillanatok alatt megoldható:

$$\alpha = \frac{3}{2}; \beta = -\frac{1}{2}; \gamma = -\frac{1}{2}, \text{ tehát: } T = C \cdot a^{3/2} \cdot G^{-1/2} \cdot M^{-1/2} = C \cdot \sqrt{\frac{a^3}{G \cdot M}},$$

amit kissé átrendezve megkapjuk Kepler III. törvényét (1.1.):

$$a^3 = \frac{G \cdot M}{C^2} \cdot T^2 \quad (3.1.)$$

Fontos új eredmény, hogy a K állandó értékére (elvi!) összefüggéshez jutottunk:

$$K = \frac{G \cdot M}{C^2} \quad (3.2.)$$

melyet összevetve (1.2) empirikus kísérleti értékkel (M ekkor természetesen a Nap tömege) kiszámolhatjuk C állandó közelítő empirikus értékét:

$$C \approx 6,28 \cdot 2\pi,$$

így az a *feltevés* adódik, hogy:

$$K = \frac{G \cdot M}{(2\pi)^2},$$

azaz *Kepler III. törvényének pontosított alakja sejtésünk szerint:*

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{(2\pi)^2} \quad (3.3.)$$

ami nagyon jó empirikus egyezést mutat a csillagászati megfigyelésekkel.

4. Newtoni dinamika (tisza elmélet)

Az ún. *centrális erőtér* esetén tetszőleges tömegpont mozgását meghatározó potenciális (helyzeti) energia csak az adott ponttól (erőtér-centrumtól) mért r távolságtól függ, tehát:

$$V(r) \quad (4.1.a)$$

Ekkor a tömegpontra ható erő definíció szerint:

$$\vec{F} = -\frac{dV}{dr} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (4.1.b)$$

amelynek hatásvonala mindig a vonatkoztatási rendszer egy meghatározott pontján, a centrumon (többnyire ide választjuk a koordináta-rendszer \mathbf{O} origóját) halad keresztül.

A legfontosabb – és a természetben legáltalánosabban megjelenő – centrális erők azok, amelyekben a potenciális energia az r távolsággal fordítottan arányos:

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad (4.2.a)$$

ahol $\alpha > 0$ vonzó, $\alpha < 0$ taszító jellegű erőtér esetén. (4.1.b)-ből következően az erő $\frac{1}{r^2}$ szerint függ a távolságtól:

$$\vec{F} = -\frac{dV}{dr} \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\alpha}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \text{ azaz } |\vec{F}| = \frac{\alpha}{r^2} \text{ és } -\frac{\vec{r}}{r} \text{ a centrum felé mutató egységvektor}, \quad (4.2.b)$$

Gravitációs erőtér (M tömegű csillag és m tömegű bolygó) esetén $\alpha = G \cdot M \cdot m$, ahol G a gravitációs állandó [4].

Jelen tanulmányban egy csillag körül történő bolygómozgást tárgyaljuk, ez esetben nyilvánvalóan az m tömegű bolygóra ható gravitációs erőhatást kell figyelembe venni, amely tehát az M tömegű ($M \gg m$) csillag felé mutat, a nagysága pedig (4.2.b) alapján:

$$F_g = G \frac{m \cdot M}{r^2} \quad (4.3)$$

Newton II. axiómája szerint az m tömegű bolygó mozgásegyenlete:

$$m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F} \quad (4.4)$$

Most a bolygóra csak a gravitációs erő hat, tehát a mozgásegyenlet jobboldalára a (4.3.) erő kerül, amely a centrális jellegéből következően mindig radiális irányba (a csillag, mint vonzócentrum felé) mutat, így az egyenlet bal oldalán levő gyorsulásvektor is radiális irányú, tehát a (4.4.) vektoregyenlet száme egyenletté válik:

$$m \cdot a_r = G \frac{m \cdot M}{r^2} \quad (4.5)$$

A körmozgásnál tanultak szerint az a_r radiális irányú gyorsulást centripetális gyorsulásnak nevezzük és ismert, hogy:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R, \quad (4.6)$$

ahol $r = R$ a körpálya sugara, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ a szögsebesség, T keringési idővel.

Így a (4.5.) mozgásegyenletünk alakja körmozgás esetén:

$$m \cdot \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \cdot R = G \frac{m \cdot M}{R^2},$$

egyszerűsítés és rendezés után:

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{(2\pi)^2} \quad (4.7.)$$

Ez nem más, mint a (2.3.) Kepler III. törvénye kör pályára (kör egy speciális ellipszis, amelynél $a = R$). Tetszőleges ellipszis pálya esetén a matematikai levezetés kicsit nehezkesebb, de szintén Kepler III. törvényéhez jutunk.

5. Lagrange-formalizmus (még tisztább elmélet)

Haladjunk végig a Lagrange-formalizmus lépésein.

(1) A vizsgált rendszer szabadsági fokszámának megállapítása.

(1.a) A mozgás két-dimenziós (egy síkban történik), tehát $D = 2$.

(1.b) Egy anyagi objektum (a bolygó) végez mozgást, tehát $N = 1$.

Ez alapján tehát Descartes-koordináta rendszerben 2 koordinátára van szükség: az m tömegű bolygó helyét megadó x és y koordinátákra.

(1.c) Jelen esetben nincsenek kényszerfeltételek a mozgásra, azaz előírások a koordinátákra, tehát $s = 0$ a kényszerfeltételek száma.

(1.d) Ezek alapján már meghatározható a rendszer szabadsági fokainak a száma:

$$f = N \cdot D - s = 1 \cdot 2 - 0 = 2$$

(2) Tehát 2 megfelelően választott általános koordináta szükséges a teljes leíráshoz.

Igen kézenfekvő, hogy jelen esetben (a centrális jelleg miatt) egyik általános koordinátának a bolygónak a csillagtól mért r távolságát érdemes választani. Ez viszont a polár koordináta-rendszert sugallja, tehát másik általános koordináta legyen a csillagtól a bolygóhoz húzott sugár x -tengellyel bezárt φ szöge, hiszen r és φ adatokkal a bolygó helye egyértelműen meghatározott.

Legyen tehát $q_1 = r$ és $q_2 = \varphi$ a választott általános koordináták.

Fejezzük ki ezekkel az általános koordinátákkal az x és y Descartes-koordinátákat:

$$x = r \cdot \cos \varphi ; y = r \cdot \sin \varphi \quad (5.1.)$$

(3) Írjuk fel az általánosított koordinátákkal a rendszer L Lagrange-függvényét!

(3.a) A kinetikus (mozgási) energia:

$$T = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

A Pitagorasz-tétel szerint fennáll, hogy:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2.$$

Használjuk az (IV.1.) összefüggéseket és végezzük el a deriválásokat, kapjuk hogy:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \left(\frac{d}{dt}(r \cdot \cos \varphi) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt}(r \cdot \sin \varphi) \right)^2 = (\dot{r} \cdot \cos \varphi - r \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi})^2 + (\dot{r} \cdot \sin \varphi + r \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\varphi})^2 = \dot{r}^2 + r^2 \cdot \dot{\varphi}^2$$

Így a mozgási energia immáron az általános koordinátákkal:

$$T = \frac{1}{2} m \cdot (\dot{r}^2 + r^2 \cdot \dot{\varphi}^2)$$

(3.b) A potenciális (helyzeti) energia jelen esetben a (III.2.a) centrális potenciál a gravitációra $\alpha = G \cdot M \cdot m$:

$$V(r) = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

(3.c) Ezekkel felírhatjuk a rendszer $L = T - V$ Lagrange-függvényét. Jelen esetben:

$$L = \frac{1}{2} m \cdot (\dot{r}^2 + r^2 \cdot \dot{\varphi}^2) + \frac{G \cdot M \cdot m}{r} \quad (5.2.)$$

Tehát előállt a bolygómozgás Lagrange-függvénye az r és φ általános koordinátákkal valamint \dot{r} és $\dot{\varphi}$ általános sebességekkel.

(4) A mozgásegyenletek levezetése az Euler-Lagrange egyenletek alapján:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Mivel két általános koordinátánk van ($q_1 = r$ és $q_2 = \varphi$), így kétszer kell felírunk az Euler-Lagrange egyenletet, hogy megkapjuk a keresett mozgásegyenleteket.

Tekintsük először a $q_1 = r$ általános koordinátát és végezzük el az előírt deriválásokat (a teljes deriváltknál használva a láncszabályt).

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \text{ és } \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \cdot \ddot{r}, \text{ valamint } \frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{\partial L}{\partial r} = m \cdot r \cdot \dot{\varphi}^2 - \frac{G \cdot m \cdot M}{r^2}.$$

Így az Euler-Lagrange egyenlet:

$$m \cdot \ddot{r} - m \cdot r \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{G \cdot m \cdot M}{r^2} = 0 \quad (5.3.a)$$

Tekintsük ezután a $q_2 = \varphi$ általános koordinátát:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m \cdot r^2 \cdot \dot{\varphi} \text{ és } \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m \cdot r^2 \cdot \ddot{\varphi} + 2m \cdot r \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{r}, \text{ valamint } \frac{\partial L}{\partial q_2} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

Így az Euler-Lagrange egyenlet ezúttal:

$$m \cdot r^2 \cdot \ddot{\varphi} + 2m \cdot r \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{r} = 0 \quad (5.3.b)$$

A (5.3.a) és (5.3.b) egyenletek adják a bolygó keresett mozgásegyenleteit.

Egyszerűsítés érdekében tárgyaljuk most is a körpálya esetét, azaz $r(t) = R$. Ebből viszont $\dot{r} = 0$ és $\ddot{r} = 0$, ezek szerint (5.3.b)-re:

$$m \cdot R^2 \cdot \ddot{\varphi} = 0,$$

tehát $\ddot{\varphi} = 0$, amiből $\dot{\varphi} = \text{állandó}$ következik, azaz a szögsebesség állandó $\dot{\varphi} = \omega = \frac{2\pi}{T}$, ahol

T a bolygó keringési ideje.

$r(t) = R$ és $\ddot{r} = 0$ valamint $\dot{\varphi} = \omega = \frac{2\pi}{T}$ felhasználásával (5.3.a) az alábbi alakú lesz:

$$-m \cdot R \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 + \frac{G \cdot m \cdot M}{R^2} = 0$$

amit rendezve kapjuk, hogy:

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{(2\pi)^2} \quad (5.4.)$$

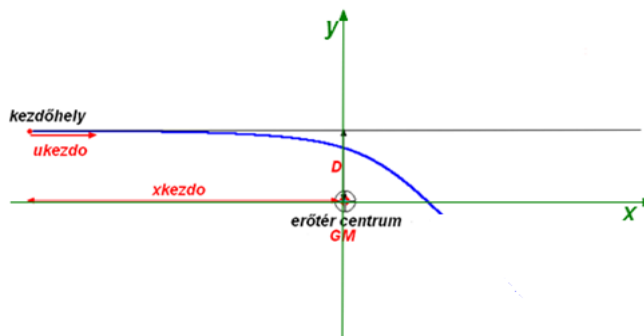
Tehát ezúttal is Kepler III. törvényét kaptuk.

6. Számítógépes kísérleti fizika (szimuláció)

A számítógépek a fizika számára is új dimenziót nyitottak, létrejött a számítógépes kísérleti fizika, mint teljesen újszerű vizsgálati módszer. A számítógépes szimulációk segítségével olyan modellekről tudunk releváns kvantitatív információt nyerni, amelyek korábban egyáltalán nem, vagy csak kvalitatív módon voltak tárgyalhatók. Jelen cikkünkben a számítógépes kísérleti fizikát a Dynamics Solver (továbbiakban DS) ingyenesen letölthető program [5] segítségével mutatjuk be [6], amelyet célirányosan dinamikai rendszerek szimulációjára fejlesztettek ki. A DS használata nem feltételez programozási előképzettséget: a szimulációhoz szükséges minden információ bevitele felhasználóbarát párbeszéd-ablakokban történik és a sokrétű grafikus és numerikus eredmények megjelenítése és kinyerése nagyon egyszerű. A program hatékony beépített fordítója a standard alakú matematikai kifejezések széles osztályát kiemelkedően gyors futású belső kóddá alakítja. A fentiek miatt a DS kiemelkedően hatékony eszköz dinamikai rendszerek tanulmányozására [7].

A (Descartes-féle) koordináta-rendszer origóját az erőter centruma helyezve négy paraméter határozza meg a mozgást:

- az erőter erősségét megadó **GM** paraméter (amely gravitációs erőter esetén: $GM = G \cdot M$),
- valamint a kezdőfeltételek, tehát az $(x_0 = x_ini ; y_0 = D)$ kezdőhely az **x_ini** és **D** paraméterekkel, valamint az $(v_{x_0} = u_0 = u_ini ; v_{y_0} = v_0 = 0)$ – tehát x-tengellyel párhuzamos irányú – kezdősebesség-vektor az **u_ini** paraméterrel (a mozgás általános jellegét nem korlátozzuk azzal, hogy a kezdősebességet az x-tengellyel párhuzamosnak vesszük).



4. ábra. Centrális erőterben mozgó objektum pályájának paraméterei

A centrális erőteréből a gyorsulásvektor:

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \vec{F} = -\frac{1}{m} \frac{\alpha}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \Rightarrow \vec{a} \left(a_x = \ddot{x} = -\frac{\alpha x}{mr^3}; a_y = \ddot{y} = -\frac{\alpha y}{mr^3} \right) \quad (6.1.)$$

(6.1.) utolsó alakja adja meg az x, illetve y koordinátákra vonatkozó mozgásegyenleteket, amelyek matematikai szempontból egy másodrendű differenciálegyenlet-rendszert jelentenek.

$$v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad \text{és} \quad v_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt}$$

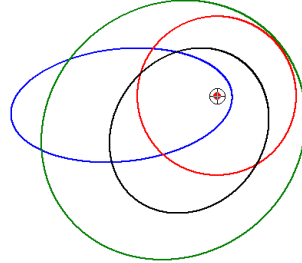
sebességváltozók bevezetésével ez egy 4 ismeretlenes elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerre alakítható:

$$\dot{x} = v_x ; \dot{v}_x = -\frac{\alpha x}{mr^3} ; \dot{y} = v_y ; \dot{v}_y = -\frac{\alpha y}{mr^3} \quad (6.2.)$$

Ezt a differenciálegyenlet-rendszert számítógéppel (pl. a DS-el) könnyen megoldhatjuk numerikusan, mintegy kicsiny időlépésekben haladva „kigöngyöltve” a pályát.

Ellipszis pálya ("bolygó") jelenik meg például az alábbi paraméterértékeknél (lásd az ábrán):

- $GM = 20$, $u_{ini} = 2$, $x_{ini} = -5$, $D = 3$ (kék színű, lapos),
- $GM = 20$, $u_{ini} = 3$, $x_{ini} = -1$, $D = 3$ (fekete, kevésbé lapos),
- $GM = 20$, $u_{ini} = 2$, $x_{ini} = -2$, $D = 6$ (zöld színű, majdnem kör),
- $GM = 20$, $u_{ini} = 2$, $x_{ini} = 0$, $D = 5$ (piros, kör),



5. ábra. Ellipszis pályák a DS szimulációban

A számítógéppel könnyen meghatározhatjuk az egyes pályák fél nagytengelyét, illetve a keringési időt, konkrétan az alábbi numerikus értékeket kapva:

paraméterek	a	T	$a^3/T^2=K$
1. bolygó: $GM=20$, $ukezdo=2$, $xkezdo=-5$, $D=3$	7	26	0,507
2. bolygó: $GM=20$, $ukezdo=2$, $xkezdo=-2$, $D=6$	8,6	35,5	0,505
3. bolygó: $GM=20$, $ukezdo=2$, $xkezdo=0$, $D=5$	5	15,7	0,507
4. bolygó: $GM=20$, $ukezdo=3$, $xkezdo=-1$, $D=3$	5,5	18	0,513

A (2.1.) törvényben szereplő K konstans elméleti értéke (4.7.) vagy (5.4.) szerint:

$$K = \frac{G \cdot M}{(2\pi)^2} = \frac{GM}{(2\pi)^2} = \frac{20}{(2\pi)^2} = 0,507 .$$

Összefoglalás

A fizika erejét és megbízhatóságát mutatja, hogy hat teljesen különböző módon tudunk eljutni Kepler III. törvényéhez: tisztán empirikus úton (távcsöves) megfigyelési eredmények elemzésével, egy roppant elegáns gondolat kísérlettel, a mértékegységek dimenzióanalízisével, a Newtoni dinamika segítségével, illetve a Lagrange-formalizmus használatával, végül számítógépes kísérleti fizikával.

Záró megjegyzésként kiemelném, hogy a Lagrange-formalizmus mennyire világos, egyértelmű és egyszerű lépések sorozata, amely matematikai tudásként is kizárólag a deriválást tételezi fel (márpedig „deriválni a ló is tud!”). A Lagrange-formalizmus hatékonysága a Newtoni leíráshoz képest egyre dominánsabbá válik bonyolultabb rendszerek tárgyalása esetén: olyan komplex rendszerek modelljének levezetésére is képes, ahol a Newtoni megközelítés már praktikusán keresztülvihetetlen.

Irodalomjegyzék

- [1] Tél T.: Milyen tudomány a fizika? Természet Világa 143, CLXXVII-CLXXXI (2012)
- [2] Kocsondi A.: A gondolat kísérlet néhány gnoszeológiai sajátossága. In: Acta Universitatis Szegediensis : sectio philosophica, (15). pp. 27-40. (1974)
- [3] R. Bhaskar, Anil Nigam: Qualitative physics using dimensional analysis, Artificial Intelligence, Volume 45, Issues 1–2, 1990, Pages 73-111, ISSN 0004-3702, DOI:10.1016/0004-3702(90)90038-2.
- [4] M. Moriconi. Elementary Solution of Kepler Problem (and a few other problems). Rev. Bras. Ensino Fis.. 2022. Vol. 44. DOI: 10.1590/1806-9126-rbef-2021-0365
- [5] <http://tp.lc.ehu.es/jma/ds/ds.html> (© J. M. Aguirregabiria, Universidad del País Vasco, Leioa, Vizcaya, Spain)
- [6] Nagy P., Tasnádi P.: Investigation of planar motions with computer simulation, XXXVIII. Kandó Konferencia 2022 - Kiadvány kötet, Budapest, Magyarország : Óbudai Egyetem (2022) 419 p. pp. 365-386. , 24 p.
- [7] Z. Csernovszky, P. Nagy, P. Tasnádi: Investigation of chaos in the absence of programming skill, Canadian Journal of Physics, Volume 98, Number 6, June 2020, pp. 593-605, DOI: 10.1139/cjp-2019-0466