

# EGY SZÁMELMÉLETI JÁTÉK ÉS TANULSÁGAI

## A NUMBER THEORETICAL GAME AND ITS LESSONS

*Szüleim Emlékére*

Dedicated to the Memory of my Parents

*Molnár Emil*

Geometria Tanszék, Matematika Intézet, Természettudományi Kar, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Magyarország

---

### **Kulcsszavak:**

Számjáték,  
nyerő stratégia;  
Párhuzamok az  
axiómarendszerrel,  
feladat-megoldással

### **Keywords:**

Game with numbers,  
winning strategy;  
Analogies  
with axiomatics and  
problem solving

### **Cikktörténet:**

Beérkezett 2019. augusztus 28.  
Átdolgozva 2019. október 4.  
Elfogadva 2019. november 5.

---

### **Összefoglalás**

Édesapám, *Molnár Ernő* (1912-1994), a Győri Révai Miklós Gimnázium egykori tanára – korábban a Kecskeméti Pedagógus Árvaház nevelője (ahova én is megszülettem 1943-ban) – játszott velem (1957 körül) a bevezetésben leírt játékot. A játék „messzemenő” tanulságai, a sakkjátékkal és persze a matematikával is összevetve, tán „örökre” végig kísérnek. Alig várom, hogy unokáimmal is játszhasam majd!

### **Abstract**

My father, *Ernő Molnár* (1912-1994), the late teacher of the Gymnasium Miklós Révai of Győr – previously he was a foster-father of The Orphan Home of Kecskemét (where I was born to in 1943) – played with me (about 1957) the game described in the introduction. The far-extending lessons of this game, comparing with the chess and with mathematics as well, accompany me since that time, maybe „forever”. I am expecting for the time, when I can play this game with my grandchildren!

---

## 1. Bevezetés

*A sakkjátékban 32 figura van. Két játékos felváltva veszi el a sakkfigurákat, legalább egyet, de legfeljebb négyet. Az nyer, aki az utolsó figurát elveszi.*

*In the chess game we have 32 figures. Two players consecutively take off the figures, each at least 1 piece, at most 4 pieces. The winner is the one who takes off the last figure(s).*

### **A játék átfogalmazása**

Mindjárt az elején átfogalmazzuk játékunkat úgy, hogy papírral és ceruzával két gyermek is játszhasna, vagy még inkább a táblán krétával játszhasna az előadó a hallgatóság képviselőjével, mint itt most ezen a konferencián. Vagy egy általános iskolai osztályban a tanár játszhatta valamelyik tanulóval, mint ahogy az velem is megtörtént, amikor tanárjelölt voltam (több mint 50 évvel ezelőtt).

Látni fogjuk, hogy a számokra történő áttérés a játékot is megkönnyíti (ez az absztrakció egyik előnye)!

A játék elején felírjuk a 32 kezdőszámot (ezt  $N$  jelöli) a táblára. A tanulónak, mint kezdőjátékosnak (**B** jelöli) kell felírnia a következő számot úgy, hogy az legalább  $a = 1$  -el, de legfeljebb  $A = 4$  -el kisebb legyen a  $N = 32$  kezdőszámnál. Ezután jön a tanár, mint második (**S** jelöli),

akinek az előbb rögzített szabályok szerint kell kisebbet írnia a táblán lévő új számnál, és így tovább. Az nyer, aki a 0 –t (nullát) felírja a táblára a játék végén.

## 2. Egy játék elemzése

Mondjuk, az elején a **B** tanuló felírja a 29 -es számot, aztán az **S** tanár következik: 28, és így tovább, **B**: 24, **S**: 20, **B**: 16, **S**: 15, **B**: 12, **S**: 10, **B**: ?.

1. Közeledik a végjáték, és a tanuló rájön, hogy veszíteni fog. Hiszen bármelyiket is írja fel **B** a 9, 8, 7, 6 számok közül, **S** az 5 –öt írja fel, és legközelebb a 0 –t, bármit is választ **B** a 4, 3, 2, 1 közül. Ezután elemezhetjük a játék táblai jegyzőkönyvét. Hol vesztette el **B**, illetve nyerte meg **S** a játékot?

2. Tehát a játék elemzését ellenkező irányban végezzük, a végén kezdve haladunk az elejéig. Hamar kiderül, hogy **S** már akkor megnyerte a játékot, amikor a 20 –t felírta, hiszen utána – a szabályok szerint – következetesen írhatta a 15, 10, 5, 0 számokat. Természetesen **B** nyerhetett volna, ha ő írja fel a 25 –öt, sőt korábban a 30 számot a játék elején.

3. Ezután a **B** tanuló, mint kezdő, meg tudja fogalmazni nyerőstratégiáját. Először a 30 számot írja fel a táblára, majd a 25, 20, 15, 10, 5, 0 következik. És ezt megteheti a játék szabályai szerint, hiszen  $a = 1$ ,  $A = 4$  miatt  $A + a = 5$  –tel tudja előző számát csökkenteni, és  $32 = 6 \times 5 + 2$  a maradékos osztás szerint. Hiszen a maradék 2 lesz, ha az  $N = 32$  kezdőszámból egymásután elveszünk  $A + a = 5$  –öt.

4. Természetesen a második játékos, **S** nyerhetett volna, ha  $N = 30$  lett volna a kezdőszám. Vagy  $N = 32$  esetében, ha a legnagyobb kivonható szám  $A = 7$  (vagy 3, 15, 31) lett volna, mivel  $32 = 4 \times 8$  ( $8 \times 4$ ,  $2 \times 16$ ,  $1 \times 32$ ).

5. Összefoglalhatjuk a játék lényegét a játékszabályok, vagyis  $N$ ,  $A$ ,  $a \in \mathbf{N}$  (a természetes számok halmazának jele)  $N > A > a > 0$  ismeretében. Tegyük fel, hogy

$$N = k \times (A + a) + r \quad (r, k \in \mathbf{N}, \quad 0 \leq r < A + a)$$

a maradékos osztás (vagy egymásutáni kivonások)  $r$  maradéka.

i) **B** nyer, ha  $a \leq r \leq A$ . Ebben az esetben először az  $N - r = k \times (A + a)$  számot írja fel, majd így tovább, a  $A + a$  számot és a 0 –t, ez a **B** kezdőjátékos nyerőstratégiája.

ii) **S** nyer (vagyis **B** veszít), ha  $r = 0$ .

iii) Ha  $0 < r < a$  vagy  $A < r < A + a$ , akkor a **B**, és a **S** játékosnak sincs nyerőstratégiája (de mindketten elérhetik a döntetlent – remis, franciául –, ha az utolsóra  $a$ -nál kevesebb, 0-nál több marad). Ugyanis a **B**  $a$ -val csökkent, ha  $0 < r < a$  (és  $A + a < N$ ); és  $A$ -val csökkent, ha  $A < r < A + a$ . Ugyanígy tesz **S**, amikor ő következik. Ha valamelyikük nagyot hibázik, a másik nyerhet, de több döntetlen helyzet is van, ha  $1 < a$  elég nagy.

## Számelméleti megjegyzések

Nyilvánvaló, hogy a játékszabályokat megváltoztathatjuk úgy, hogy valamelyik játékosnak, a (kezdő) **B** tanulóknak, vagy a (második) **S** tanárknak kedvezzen.

Ha a kezdő **B** mondja meg a  $N > A > a > 0$  számokat, akkor ő nyer. Ha először **B** rögzíti  $N$ -et, **S** választja  $A$ -t és  $a$ -t, akkor **S** fog nyerni.

Hogy a döntetlent kizárjuk, tegyük fel, hogy  $a = 1$ . Hogy a könnyű játékot kizárjuk, legyen  $N \gg A$ , vagyis a kezdőszám „sokkal” nagyobb, mint a maximális kivonható szám. Ekkor a prímszámok is szerephez jutnak. Ha **B** a  $N$  kezdőszámot prímszámnak választja, például 31, akkor **S** nem tud olyan  $A$  számot mondani, hogy ő nyerjen, hiszen  $A = 30$  nyilván nem lenne sportszerű szabály.

És így tovább, ezt a játékot teljesen kielemeztük.

### 3. Más játékok, a sakkjáték

Néhány általános megállapítást is tehetünk a *kétszemélyes játékokra*, például a sakkra, és bizonyos *egyszemélyes játékokra* (rejtvényekre, feladványokra), például a *Rubik-kocka* visszarendezésére, de az utóbbiakkal most nem foglalkozunk.

A sakkjáték jól ismert szabályai már több mint ezer évesek. Ezekhez bizonyos, eléggé elvont előírások kellene, melyek a *sakktáblára* és a *sakkfigurák lépésmódjára* vonatkoznak, éppen úgy, ahogy fenti játékunkban a *N*, *A*, a számokra és a velük történő műveletekre (a kivonásra) tettünk kikötéseket. Ezek a szabályok ugyanazok a kezdő **B**-re (fehér sakkfigurákkal játszik) és az **S** másodhúzóra (fekete figurákkal játszik).

1. A *végjáték a játék legfontosabb része*, így van ez a sakkban is.

2. A *játék lényegét a végétől visszafelé haladva kell megértenünk*. A sakkban alapvető szerepük van a matt-adási eljárásoknak (például királlyal és vezérrel a másik színű királlyal szemben, stb.). Általában a *matt-képek* és a *végjátékban ismert nyerőállások*, meghatározzák a korábbi stratégiákat.

3. A *sakkban a játék kezdetétől induló nyerőstratégia*, ha ilyen van egyáltalán, nem ismert, és nem is reményteljes erre törekedni. Ugyanez igaz a döntetlen-stratégiákra. Ez jelenti éppen a sakkjáték csodáját, szépségét, művészetét, tudományát, és még sok mindent, *amiért érdemes sakkozni*.

4. *De a 6-figurás végjátékokat már számítógéppel megoldották* (ez a legutóbbi információ; az egyik kedves bíráló hívta fel a figyelmemet, hogy – a Wikipedia szerint – 2018 augusztusától már a 7 bábos végjátékok esetét is tisztázták). Ez azt jelenti, hogy bármely 6 (7) bábos végjáték-állást teszünk fel a táblára, a számítógép eldönti, vajon a kezdő nyer, veszít, vagy a játszma döntetlenül végződik. Természetesen feltesszük, hogy mindketten a legjobban játszanak, vagyis két tökéletes számítógép-program „küzd” egymás ellen.

### 4. Az axiomatikus módszer, mint játék, történeti megjegyzések

A modern matematika bizonyos részeit, melyeket már „*elég jól axiomatizáltak*”, *individuális játékoknak* is tekinthetjük. A matematikus, mint játékos az emberiséget is képviseli. Az *alapfogalmakat*, mint a számok, geometriai alakzatok (pontok, egyenesek, síkok, vagy a tér maga), a rájuk vonatkozó *kapcsolatokkal, műveletekkel, logikai, gondolkodási szabályokkal együtt* úgy tekinthetjük, mint *játékszabályokat*. Ezek az emberiség kiemelkedő személyiségeinek, tudósoknak tapasztalatain, felismerésein, egyezményein alapulnak. Ezeket a játékszabályokat gyűjtik össze az *axiómákban*, melyek a matematika bizonyos „szűk” területeire vonatkoznak, de a fizikára és más tudományokra, sőt még a társadalom-tudományokra is „tettek már kísérletet”.

Egy *matematikai eredmény* a bizonyításával együtt úgy is tekinthető, *mint egy játékszabályokon alapuló eljárás terméke*. A lépések hasonlóak azokhoz melyeket eddig érzékeltettünk. A *végjáték elemzésével kezdjük visszafelé haladva, hogy nyerőstratégiát találjunk*, ha ilyen egyáltalán létezik. *Már tudjuk, hogy ilyen stratégia általában nem létezik*. David Hilbert, Kurt Gödel, a magyar Neumann János, csak példaként említve, tevékenysége kapcsolódik témánkhoz. Az emberi történelem, kultúra, tudomány és művészet alátámasztja sokunk megállapítását:

**„Az élet – játék!”.**

**A kiindulási játékunktól most már messzire jutottunk**. Sakkozni édesanyámtól tanultam először, majd apámtól, és ma is sakkozom. Apám, Molnár Ernő (1912-1994) tanított meg arra a játékra, melyet ebben az előadásban elemeztem, éppen sakkfigurák segítségével. Akkoriban éppen ennek a játéknak a problémáját oldotta meg, melyet *A Matematika Tanítása* című folyóiratban tűztek ki tanárok számára. A Bolyai János Matematikai Társulat és a Magyar Oktatási (és Kulturális) Minisztériumnak ez a folyóirata ma is létezik. Lelkes tanárok oldják meg a feladatokat képességeik és ismereteik gyarapítására és a saját gyönyörűségükre.

Itt is megköszönöm kedves kollégáimnak, *Molnár Sáska Gábornak* és *Lángi Zsoltnak* segítő javaslatait.

Ez a közlemény megjelent: először az Eszéki (Osijek) Josip Juraj Strossmayer Egyetem, azóta már hagyományossá váló, a *MATEMATIKA ÉS A GYERMEK* konferenciák monográfia sorozatában [4], angol és magyar nyelven, a szerző játékkal kísért rövid előadása nyomán, később pedig *A Matematika Tanításában* [5].

## 5. Kiegészítő megjegyzések a JOK 2019 nyitó előadásán

Az előadáson ismertetett számelméleti játékhoz hasonló (mégis nagyon más) jellegű a - nemzetközi irodalomban ismertebb -

### **NIM játék:**

*Két játékos felváltva vesz el golyókat  $K$  darab (az egyszerűsítés kedvéért mondjuk  $K = 3$ ) kupacban elhelyezett  $k_1, k_2, \dots, k_K$  számú golyóból úgy, hogy a soron lévő egy, általa éppen akkor kiszemelt kupacból vesz el legalább 1 golyót, de legfeljebb az egész kiszemelt kupacot. Az nyer, aki az utolsó golyó(ka)t elveszi.*

Ez a játék sokkal nehezebb, és a tanári rávezetés feladatai is sokkal jelentősebbek, mert meglepő módon a játék kulcsa a 2-es számrendszer alkalmazása a kupacokban lévő golyók  $k_1, k_2, \dots, k_K$  számának felírására. Mert ugye, a nyerni akaró játékos „**párokat**” szeretne hagyni partnerének, úgyhogy az „ilyen helyzetet aztán újra és újra elérhesse”.

Már régi az a gondolat, hogy **a sakkjáték tanítása legyen általános iskolai tananyag**. Polgár Judit sakk-nagymester, ENSZ-diplomatánk kedvenc törekvése is ez. **Én ezt aránytalannak érzem**, de a sakkról mindenképpen essen szó a matematika-órán, akár feladatok formájában is, például:

*Végig tud-e „menni” egy huszár a  $8 \times 8$  mezőből álló sakktáblán huszár-ugrásokkal úgy, hogy minden mezőn pontosan egyszer álljon meg? (Nem könnyű feladat!) Aztán úgy, hogy a kezdő mezőre érjen vissza!?*

És legyen az iskolában sakk-szakkör! - ez nekem is szép élményem volt.

**Az emberiség legfontosabb axiómarendszerei a számokra és a geometriára vonatkoznak.** Talán meglepő módon a geometria került először az érdeklődés középpontjába. Éppen a mi Bolyai Jánosunk mutatta meg először (az orosz Nyikolaj I. Lobacsevszkij -jel közel egyidőben, tőle függetlenül, még nem befejezve), hogy az **euklideszi párhuzamossági axióma nem bizonyítható be a többi un. maradék axiómák segítségével**. Elképzelhető tehát olyan geometriai rendszer (ezt a hiperbolikus geometriát fel is építette), melyben egy adott  $A$  ponton át egy rá nem illeszkedő a egyeneshez az  $(A, a)$  síkban több  $a$ -t nem-metsző egyenes is húzható. Az euklideszi geometriában csak egy ilyen lehet, ez az euklideszi párhuzamossági axióma egyik átfogalmazása. Annak bizonyítása, hogy létezik egy ilyen nem-metsző, Eukleidész örök gyöngyszeme.

**A párhuzamossági axióma független a maradék axiómáktól!** Olyan ez, mint amikor a sakkjáték, vagy más játékok kimenetele döntetlen.

**A természetes számok egyidősek az emberiséggel.** Mégis csak 1890 körül foglalta axiómarendszerbe (Mindössze öt axióma!) az olasz Giuseppe Peano a természetes számokra vonatkozó ismereteinket. **Létezik az egy (1), mint természetes szám.** (Ez máris vita-téma! Vannak, akik a 0-t tekintik a kezdő természetes számnak.) **Minden természetes számmal együtt a rákövetkezője is természetes szám.** ...

Mennyi bölcsesség is van ezek mögött. Például, értelmetlen egybefoglalni (és megszámlálni, mert hát ez a rákövetkezés művelete!) egymáshoz nem kötődő dolgokat.

**A teljes indukció axiómája** meg felér egy filozófiai tanulmánnyal!

Az a tétel és bizonyítása, hogy **végtelen sok prímszám van, Eukleidész másik örök gyöngyszeme.** De hogy a 2 különbségű, un. **ikerprímek száma is végtelen-e**, máig nyitott (reménytelennek tűnő) kérdés. És hát a számelméletben még mennyi nehéz nyitott probléma van!

## 6. Egy emlék: Pólya György tanórája

A matematikai feladat-megoldás tanításának módszertani kérdéseire máig iránymutatók a magyar Pólya György (1887-1985) tevékenysége és könyvei: *A gondolkodás iskolája*, *A problémamegoldás iskolája*. Nagy szerencsémnek tartom, hogy részese lehettem annak a 45-perces tanórának, melyet a hazalátogató (akkor 81 éves) Pólya György professzor tartott a Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium „specmatos” tanulóinak (az akkor érettségiző diákok közül *Babai Lászlóra*, *Csörgő Piroskára*, *Moson Péterre*, *Szűcs Andrásra* emlékszem, ahogy utólag kinyomoztam, az esemény 1968 tavaszán volt).

A téma – **Szélsőérték feladatok**. A professzor felelevenítette, hogy a (rögzített) körbe írt háromszögek közül a szabályos háromszög a legnagyobb kerületű és területű. Hiszen ha a háromszögnek van két nem egyenlő szomszédos oldala, akkor területe (és kerülete is) növelhető a közös csúcspont körön történő elmozgatásával. (A finomságokat most nem részletezem, az órán

sem történt meg). Ez a gondolatmenet lényegében változatlanul elmondható a többi körbeírt  $n$ -szögre ( $n > 3$  adott természetes szám).

De fontoljuk meg, mi történik, ha kör helyett *egy adott ( $R$  sugarú) gömböt tekintünk a térben,  $s$  a gömbön adott  $n \geq 4$  számú pontot helyezünk el? Vizsgáljuk a pontok által meghatározott konvex test térfogatát. **Milyen pont-elhelyezés mellett lesz ez a térfogat a legnagyobb?** A professzor érzékeltette, hogy jóval nehezebb problémával állunk szemben. A szabályos tetraéder  $n = 4$  esete még viszonylag könnyű. Az  $n = 5$  eset már „érdekesebb”. Az  $n = 6$  eset a szabályos oktaéderhez vezet ( $n = 7$  megint nagyon nehéz).*

Vizsgáljuk meg az  $n = 8$  esetet. A gömbbe írt kocka térfogata a legnagyobb? Esélyesnek tűnik, a szabályosság eddig is nagy „előny” volt. Fontoljuk meg!

De nézzük csak azt a kettős gúlát, melynek hat csúcsa a földgömbi egyenlítő fő-körön alkot szabályos hatszöget, kettő pedig az „északi és déli pólusban” van. Elárulom, hogy ennek térfogata nagyobb lesz, mint a kockáé. Legyen a számítás házi feladat.

Kicsengettek, az óra véget ért.

Szinte máig azt gondoltam, hogy ez a kettős gúla a legnagyobb térfogatú (térfogata  $R^3 \cdot \sqrt{3}$ ,  $\sqrt{3} \approx 1,73 \dots$ ), szép szabályos is, a professzor is mintha ezt sugallta volna.

*De nem így van!* G. Horváth Ákos kollégám tartott a témáról szemináriumi előadást (3-4 éve), s kiderült, hogy a legnagyobb térfogatú test - nem ez a kettős gúla, és a testet nem is könnyű leírni (térfogata  $\approx R^3 \cdot 1,8157 \dots$ ). Ő is csak ekkoriban tudta meg, hogy az [1] dolgozatban már közölték az eredményt (lásd még a [2] átfogó ismertető cikket, továbbá *Lángi Zsolt*tal közös magasabb dimenziós [3] dolgozatukat).

**Tehát Pólya György nem tudhatott akkoriban erről az eredményről. De bizonyára foglalkoztatta a téma, és lehet, hogy tehetséges tanítványainak egy élő, megoldatlan problémát akart adni emlékül.**

### Irodalomjegyzék

[1] Joel D. Berman & Kit Hanes, Volumes of Polyhedra Inscribed in the Unit Sphere in  $E^3$ . *Math. Annalen* **188**, 78-84 (1970)

[2] Ákos G. Horváth, Volume of Convex Hull of Two Bodies and Related Problems. M. Conder et al. (eds), *Discrete Geometry and Symmetry, Dedicated to Károly Bezdek and Egon Schulte on the Occasion of Their 60th Birthdays*, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics **234** (2018), 201-224.

[3] Ákos G. Horváth & Zsolt Lángi, Maximum volume polytopes inscribed in the unit sphere. *Monatsh Math* **181** (2016), 341-354. DOI 10.1007/s00605-016-0949-2

[4] Molnár Emil, Számelméleti játék sakkfigurákkal. 2. *Nemzetközi Tudományos Kollokvium MATEMATIKA ÉS A GYERMEK* 2009. április 24. Eszék / Horvátország, pp. 173-176. ELEMENT, Zagreb, 2009.

Angol nyelven: Emil Molnár, A numbertheoretical game with chess figures. *2nd International Scientific Colloquium MATHEMATICS AND CHILDREN* 24 April 2009, Osijek / Croatia, pp. 83-86, ELEMENT, Zagreb, 2009, ISBN 978-953-197-568-1.

[5] Molnár Emil, Számelméleti játék sakkfigurákkal. *A Matematika Tanítása* **17/4** (2009), 21-23, Mozaik Kiadó.