Gradus Vol 5, No 2 (2018) 229-232
ISSN 2064-8014

RÖVID BETEKINTÉS A C*-ALGEBRÁK K-ELMÉLETÉBE

A SHORT VIEW OF THE K-THEORY OF C*-ALGEBRAS

Kovács István Béla

Módszertani Intézeti Tanszéki Osztály, Pénzügyi és Számviteli Kar, BGE, Magyarország

Kulcsszavak:
C*-algebra
K_0 -elmélet
funktor

Keywords:
C*-algebra
K_0 -theory
functor

Cikktörténet:
Beérkezett 2018. október 10.
Átdolgozva 2018. október 31.
Elfogadva 2018. november 5.

Összefoglalás
A huszadik század második felében Atiyah munkája nyomán a K-elmélet több terület kutatásában is értékes eszköznek bizonyult. Ezen területek egyike a C-algebrák. Be kívánjuk mutatni a fogalmakat és összefüggéseket, amelyek a C*-algebrák K_0 -elméletének alapját képezik. Megemlítünk néhány problémát, amelyek megoldásához a K_0 -elmélet hozzájárult.*

Abstract
Following Atiyah's work, K-theory has proved to be an effective tool in the research of several fields of mathematics in the second half of the twentieth century. One such field is C-algebras. We wish to present the concepts and relations fundamental to the K_0 -theory of C*-algebras. We mention some problems solved with the help of K_0 -theory .*

1. A K-elmélet története dióhéjban

A K-elméletet Grothendieck algebrai geometriai munkája nyomán fejlesztette ki Atiyah [1] és Hirzebruch az 1960-as években. A C*-algebrák elméletében is hatásosnak bizonyult. A K-elmélet egy funktor pár K_0 és K_1, amely bármely A C*-algebrához hozzárendeli a $K_0(A)$ és $K_1(A)$ Abel-csoportokat.

Első felhasználásuk George Elliott [3] nevéhez fűződik, aki 1976-os cikkében megmutatta, hogy az AF-algebrák rendezett K_0 csoportjukkal osztályozhatók, míg a K_1 csoportjuk az egy elemű csoport. Az adott terjedelemben mi is csak a K_0 csoport konstrukcióját mutatjuk be. A K-elmélet segítségével állapították meg Pimsner, Voiculescu [4], Blackadar [2] egyes C*-algebrákról, hogy nem tartalmaznak nem triviális projekciókat. Brown, Douglas és Fillmore dolgozták ki a K-elmélettel duális K-homológia elméletet. Kasparov pedig egyetlen KK-elméletben egyesítette a K-elméletet és K-homológiát. Kötelező a témában megemlítenünk Alan Connes Noncommutative Geometry című könyvét, amelyben bemutatja, hogyan lehet áttekinteni olyan széles területet, ami tartalmaz többek között geometriát, fizikát, C*-algebrákat és algebrai topológiát.

Elegáns és világos Rordam, Larsen és Laustsen bevezető könyve, amire a jelen ismertetés anyagát alapoztuk [5].

* Kapcsolattartó szerző. E-mail cím: Kovacs.IstvanBela@uni-bge.hu

2. Amit a C*-algebrákról tudnunk kell

Definíció 2.1. A C*-algebra, ha **C** fölötti involutív komplett normált algebra, melynek normája minden $a,b\in A$ mellett teljesíti a

$$\|ab\|\le\|a\|\cdot\|b\| \text{ és}$$
$$\|a^*a\|=\|a\|^2$$

összefüggéseket. A továbbiakban csak egység elemes C*-algebrákat tárgyalunk.

A C*-algebrák morfizmusa a *-homomorfizmus.

Definíció 2.2. Legyenek A és B C*-algebrák. $\varphi : A\to B$ lineáris függvény *-homomorfizmus, ha multiplikatív, és teljesíti minden $a\in A$-ra:

$$\varphi\left(a^*\right)=\varphi(a)^*.$$

Az absztrakt definícióval szemben segít elképzelni a C*-algebrákat az alábbi reprezentációs tétel.

Tétel 2.3. Gelfand – Naimark
Bármely A C*-algebrához létezik H Hilbert tér és egy φ izometrikus *-homomorfizmus A-ról B(H)-ba. Itt B(H) a H korlátos operátorainak tere.

Látjuk tehát, hogy a C*-algebrákat az M_n (**C**) tulajdonságainak megfelelően általánosítottuk, ahol M_n (**C**) n x n-es complex elemű matrix. Nem meglepő tehát, hogy egy A C*-algebra elemeiből alkotott négyzetes mátrixok újra C*-algebrát alkotnak.

Tétel 2.4. Legyen A C*-algebra. H és φ egy Gelfand – Naimark reprezentációja. Legyen továbbá $\varphi_n : M_n(A)\to B(H^n)$ a

$$\varphi_n\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ . & \dots & . \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \varphi(a_{11}) & \dots & \varphi(a_{1n}) \\ . & \dots & . \\ \varphi(a_{n1}) & \dots & \varphi(a_{nn})\end{pmatrix}$$

által definiált *-homomorfizmus. Ekkor $M_n(A)$ is C*-algebra a $\|a\|=\|\varphi_n(a)\|$ normával.

Definíció 2.5. Legyen A C*-algebra. $p\in A$ projekció, ha $p=p^2=p*$. A összes projekcióinak halmazát jelölje P(A)!

3. A $P_\infty(A)$ és $D(A)$ félcsoportok

Definíció 3.1. Legyen A C*-algebra, n pedig pozitív egész. Legyen

$$P_n(A)=P(M_n(A)) \text{ és}$$
$$P_\infty(A)=\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(A).$$

A $P_n(A)$ halmazokat páronként diszjunktnak tekintjük.

A következő művelettel $P_n(A)$ félcsoport: $p\oplus q=\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q\end{pmatrix}$, ahol $p\oplus q\in P_{m+n}(A)$, ha $p\in P_n(A)$ és $q\in P_m(A)$.

Definíció 3.2. Legyenek megint $p \in P_n(A)$ és $q \in P_m(A)$. Azt mondjuk, hogy p és q null-ekvivalensek, ha létezik $v \in M_{m,n}(A)$ mellyel $p = v^*v$ és $q = vv^*$. Itt természetesen $v^* \in M_{n,m}(A)$. Jelölése $p \sim_0 q$.

A következő állítás szerint a null – ekvivalencia kompatibilis a $\oplus$ művelettel.

Állítás 3.3. Legyen A C*-algebra, p, q, r, p', q' pedig $P_\infty(A)$ elemei. Ekkor

- $p \sim_0 p \oplus 0_n$ bármely n pozitív egészre.
- Ha $p \sim_0 p'$ és $q \sim_0 q'$, akkor $p \oplus q \sim_0 p' \oplus q'$.
- $p \oplus q \sim_0 q \oplus p$
- $(p \oplus q) \oplus r \sim_0 p \oplus (q \oplus r)$

A null ekvivalencia valóban ekvivalencia reláció $P_\infty(A)$-n.

Definíció 3.4 Egy A C*-algebra D(A) félcsoportjának a D(A)= $P_\infty(A) / \approx_0$ kommutatív faktor félcsoportot nevezzük.

$p \in P_\infty(A)$ mellett jelölje $[p]_D$ a p $D(A)$-beli ekvivalencia osztályát! Az összeadás D(A)-n

$$[p]_D + [q]_D = [p \oplus q]_D .$$

4. A Grothendieck konstrukció és K_0

A Grothendieck konstrukció tetszőleges kommutatív félcsoporthoz Abel-csoportot rendel annak a mintájára, ahogyan a természetes számokból az egész számok konstruálhatók.

Legyen (S, +) Abel-félcsoport. Definiáljuk S x S-en a ~ ekvivalencia relációt a következő képen $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ pontosan akkor, ha létezik $z \in S$, hogy $x_1 + y_2 + z = x_2 + y_1 + z$. Legyen G(S) az S x S ~ szerinti faktora, és jelölje $\langle x, y \rangle$ az (x, y) osztályát. Definiáljuk az összeadást G(S)-en $\langle x, y \rangle + \langle u, v \rangle = \langle x + u, y + v \rangle$ által. Az összeadás kompatibilis az ekvivalencia relációval, tehát (G(S) , +) kommutatív félcsoport. Továbbá, $\langle x, x \rangle + \langle u, v \rangle = \langle x + u, x + v \rangle = \langle u, v \rangle$, hiszen bármely $z \in S$ elemmel $(x + u) + v + z = (x + v) + u + z$. Így $\langle x, x \rangle$ neutrális elem, és $\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle = \langle x + y, x + y \rangle = 0$ miatt $\langle x, y \rangle = -\langle y, x \rangle$. Mind a 0, mind az inverz egyértelmű, tehát (G , +) Abel-csoport.

Definíció 4.1. A Grothendieck leképezés, $\gamma_y : S \to G(S)$ amely $x \in S$-hez az $\langle x + y, y \rangle$ elemet rendeli.

Könnyen látható, hogy a leképezés bármely $y \in S$ mellett ugyan az, így a továbbiakban elegendő γ-ként hivatkozni rá. Ha S 0-elemes, akkor $\gamma(x) = \langle x, 0 \rangle$. Továbbá γ additív és $\gamma(0) = 0$.

Egy újabb ekvivalencia fogalom, a stabil ekvivalencia fölhasználásával kiderül, hogy C*-algebrák esetében γ kanonikus injekciója D(A)-nak G(D(A))-ba. Hasznos a következő állítás.

Állítás 4.2. $G(S) = \{\gamma(x) - \gamma(y) : x, y \in S\}$

Az állítást alátámasztja, hogy $\gamma(x)-\gamma(y)=\langle x,0\rangle-\langle y,0\rangle=\langle x,0\rangle+\langle 0,y\rangle=\langle x,y\rangle$.

Definíció 4.3. Az A C*-algebra K_0 csoportja $K_0(A)=G(D(A))$.

Most már tudjuk Állítás 4.2-ből, hogy $K_0(A)=\{[p]_D-[q]_D : p,q\in P_\infty(A)\}$. Belátható viszont, hogy $K_0(A)=\{[p]_0-[q]_0 : p,q\in P_\infty(A)\}$, sőt az is elegendő, hogy $K_0(A)=\{[p]_0-[q]_0 : p,q\in P_n(A), n\in N\}$.

5. Kategóriák és funktorok

Ha C kategória, akkor adott O(C) a C objektumainak összessége, továbbá egy Mor (A , B)-vel jelölt morfizmus halmaz minden A , B $\in$O(C) elem párra. A morfizmusok kompozíciója asszociatív.

Ha C és D kategóriák, F kovariáns funktor C-ből D-be, ha C objektumait D-be képezi, és Mor (A , B)-t Mor (F(A) , F(B))-be képezi minden A, B$\in$O(C) esetén, továbbá $F(id_A)=id_{F(A)}$, és $F(\psi\circ\varphi)=F(\psi)\circ F(\varphi)$ megfelelő φ és ψ morfizmusokra.

Állítás 5.1. K_0 kovariáns funktor a C*-algebrák Kategóriájáról az Abel-csoportok kategóriájába.

6. Példák

A standard nyom és homotópiák segítségével belátható, hogy $P_\infty(C)$ elemei közül pontosan az azonos rangúak null-ekvivalensek. Így D(C)=N, ahol 0 a null projekció. Ezért G(D(C)) = D(C) x D(C) faktora ~ szerint, azaz N x N faktora ~ szerint, ami épen Z = $K_0(C)$.

Hasonlóan, ha A = C $\oplus$C, akkor $P_\infty(A)=\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(C\oplus C)=\bigcup_{n=1}^{\infty} P(M_n(C\oplus C))$ = $\bigcup_{n=1}^{\infty} P(M_n(C)\oplus M_n(C))$. Itt (p , q) és (u , v) párok ekvivalensek pontosan akkor, ha p és u, illetve q és v azonos rangúak. Ezért D(A)= N $\oplus$N mint félcsoportok. G(D(A)) az (N $\oplus$ N) x (N $\oplus$ N) faktora a Grothendieck ekvivalencia által. Így K_0 (C $\oplus$ C) = Z $\oplus$ Z.

Általában is, K_0 (C^n) = Z^n mint kommutatív csoport.

Irodalomjegyzék

[1] Atiyah, M., K-Theory, W. A. Benjamin Inc., New York, 1967.

[2] Blackadar, B., A simple unital projectionless C*-algebra, J. Operator Theory 5, 1981, 63-71.

[3] Elliott, G. A., On the clasification of inductive limits of sequences of semisimple finite-dimensional algebras, J. Algebra 38, 1976, 29-44.

[4] Pimsner, M., and Voiculescu, D. V., K-groups of reduced crossed products by free groups, J. Operator Theory 8, 1982, 131-156.

[5] Rordam, M, Larsen, F, Laustsen, N. J., An Introduction to K-Theory for C*-algebras, London Math. Soc., Student Texts 49, 2000.