

TÁLBAN GURULÓ GOLYÓ KAOTIKUS VISELKEDÉSE

CHAOTIC BEHAVIOR OF A MOVING BALL IN BOWL

Nagy Péter^{1*}, Tasnádi Péter²

¹Pallasz Athéné Egyetem, GAMF Műszaki és Informatikai Kar, Kecskemét

²Eötvös Loránd Tudományegyetem, TTK, Budapest

Kulcsszavak:

permanens káosz,
tranzien káosz,
egyszerű mechanikai rendszer,
numerikus módszerek,
szimuláció.

Keywords:

permanent chaos,
transient chaos,
simple mechanical system,
numerical methods,
simulation.

Cikktörténet:

Beérkezett 2016. szept. 08.
Átdolgozva
Elfogadva

Összefoglalás

A cikkben egy bonyolult alakú tálban mozgó golyó dinamikáját vizsgáljuk. Súrlódásmentes esetben tipikus konzervatív rendszerekre jellemző kaotikus viselkedést találunk. Súrlódásos esetben tranzien káosz jelenik meg, de a vonzási tartományok fraktálgeometriája irreguláris tulajdonságú. Esetünkben a káoszt jellemző klasszikus paraméterek időfüggővé válnak és a tartományok struktúrája nem invariáns a nagyításra (felbontásra). Ez az ún. kettős tranzien káosz jelensége. Fontos és érdekes tény, hogy a kaotikus viselkedés jellege megváltozik, ha külső gerjesztő erőt adunk a rendszerhez és a tranzien káosz fázisátalakulással analóg módon permanens káoszba megy át.

Abstract

The dynamics of a ball moving in a bowl was studied. In frictionless case typical conservative chaotic behavior was observed. In dissipative case transient chaos could be observed, but the fractal basin boundaries showed irregular behavior. In this case the classical parameters used to describe chaos became time dependent and the structure of the basins was not fully invariant upon magnification (or resolution). This phenomenon is recently referred as doubly transient chaos. It is an interesting fact that the character of chaos changes when driving is added. For example in the case of external excitation unstable periodic orbits immediately appear, and the long term dynamics tend to permanent chaos.

1. Bevezetés

A számítógépek a fizika számára is új dimenziót nyitottak, létrejött a *számítógépes kísérleti fizika*, mint teljesen újszerű vizsgálati módszer. A számítógépes szimulációk segítségével olyan modellekről tudunk releváns kvantitatív információt nyerni, amelyek korábban egyáltalán nem, vagy csak kvalitatív módon voltak tárgyalhatók. A kaotikus rendszerek vizsgálata az egyik legfontosabb és legismertebb példája a számítógépes kísérleti fizikának, ugyanakkor a káosz jelenségek köre kiemelt szemléletformáló erővel bír a modern fizika oktatásában.

Jelen cikk tartalmi szempontból két fontos aspektussal bír: kutatási és oktatási vonatkozással. A munka tudományos szempontból új eredményeket tartalmaz, amennyiben egy korábban nem tanulmányozott, a szakirodalomban nem tárgyalt, egyszerűen megvalósítható mechanikai rendszer kaotikus viselkedését írja le. Például olyan nagyon újszerű és egzotikus (csak néhány éve felismert és alig néhány konkrét rendszerben kimutatott) jelenség is megtalálható, mint a kettős tranzien

* Kapcsolattartó szerző: tel.: +36 20 4798204, e-mail: nagy.peter@gamf.kefo.hu

káosz. A kutatás eredményeit nemzetközi konferenciákon mutattuk be [1]-[3]. *Didaktikai értékét pedig az adja, hogy a cikk egy igen kitűnő és jól használható (ugyanakkor furcsa módon alig ismert) felhasználói programra építi fel a tárgyalást.* A szerzők az ELTE Fizika Doktori Iskolájának óraadói, egyebek között a Kaotikus mechanika tantárgy keretében ismertetik meg a hallgatókat a program használatával és a vizsgán mindenkinek egy konkrét dinamikai rendszer számítógépes modellezését és kaotikus tulajdonságait kell bemutatni. Néhány hallgató éppen a fenti újszerű mechanikai rendszer elemzését végezte el a vizsgakövetelményt messze meghaladó szinten, melyből publikáció is született [4].

A témában kevésbé tájékozott Olvasót Függelékkel segítjük a fontosabb fogalmak, módszerek és modellek megértésében.

2. A mechanikai modell

Számos kitűnő összefoglaló mű található a kaotikus jelenségek bemutatására [5], de továbbra is élénk érdeklődés mutatkozik olyan új modellek iránt, amelyek könnyen megvalósíthatók, így kísérletileg is tanulmányozhatók. Jelen cikkünkben kaotikus mechanikai modellként egy *bonyolult alakú tálban mozgó golyó dinamikai viselkedését tanulmányozzuk.* A tál felületi pontjainak $z(x,y)$ magasságát megadó függvényt $V(x,y) = z(x,y)$ gravitációs potenciálként tekinthetjük [5][6], ilyen tálak könnyen előállíthatók akár rapid prototyping eljárással is. Ez az egyszerű mechanikai rendszer valós kísérletekkel is tanulmányozható, például szintén a Doktori Iskola hallgatója a [7] publikációban az ingyenesen letölthető Tracker nevű videó elemző és modellező programot használta vizsgálataihoz.

Adott $V(x,y)$ potenciálban mozgó (egységnyi tömegű) test mozgásegyenletei könnyen felírhatók:

$$\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} - \alpha \dot{x}, \quad \ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y} - \alpha \dot{y}, \quad (1)$$

Az egyenletekbe a tál alakjából következő potenciálfüggvény mellett beillesztettünk a sebességgel arányos *súrlódásos (disszipatív)* erőt is. Amennyiben az α súrlódási tényező zérus a rendszer *súrlódásmentes (konzervatív)*. Sebességváltozók bevezetésével alakítsuk az egyenleteket a szokásos elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerre (lásd (F.I.) függelékben):

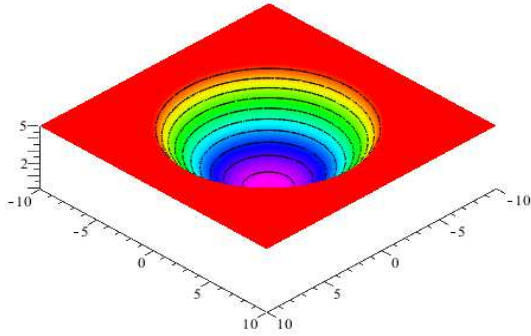
$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x, y, u, v) = u \\ \dot{u} &= f_2(x, y, u, v) = -\frac{\partial V}{\partial x} - \alpha u \\ \dot{y} &= f_3(x, y, u, v) = v \\ \dot{v} &= f_4(x, y, u, v) = -\frac{\partial V}{\partial y} - \alpha v \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

A tál z magasságának x és y függését három különböző alakú tál esetén az alábbi függvényekkel közelíthetjük, amelyek egyúttal (ha a tál vízszintes felületre helyezzük) a V gravitációs potenciált adják (x , y és V centiméter egységben értendő):

$$z(x, y) = V(x, y) = 0,1 \cdot (x^2 + y^2 - 1) \quad (3.a)$$

$$z(x, y) = V(x, y) = 0,1(x^4 + y^4 + 0,5x^2y^2 - 4x^2 - 4y^2 - 0,5xy + 40) \quad (3.b)$$

$$z(x, y) = V(x, y) = 10^{-4}(x^4 + 9y^4 + 26x^2y^2 - 100x^2 - 300y^2 + 5000). \quad (3.c)$$

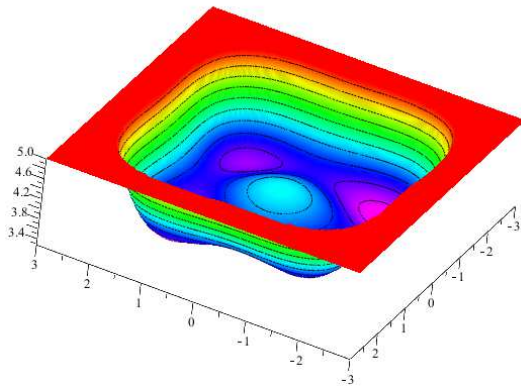


MAPLE megjelenítés



kép egy hasonló alakú tálról

1.(a) ábra: a (3.a) potenciállal adott tál

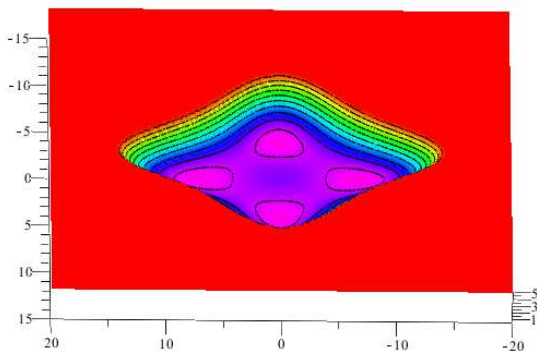


MAPLE megjelenítés



kép egy hasonló alakú tálról

1.(b) ábra: a (3.b) potenciállal adott tál



MAPLE megjelenítés



kép egy hasonló alakú tálról

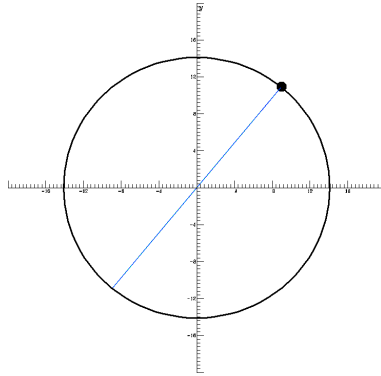
1.(c) ábra: a (3.c) potenciállal adott tál

Fontos megjegyezni, hogy míg a (3.a) potenciál esetén a tál legmélyebb pontja a tál közepén ($x = 0$; $y = 0$) pontban van, a (3.b) és (3.c) potenciálok esetén a tál legmélyebb része nem a közepén van, hanem a tál négy „csúcsa” közelében található. A tál legmélyebb részei jelentik az energiaminimumokat, azaz a golyó lokális stabil egyensúlyi helyzetét. A (3.b) potenciálú tál esetén a négy

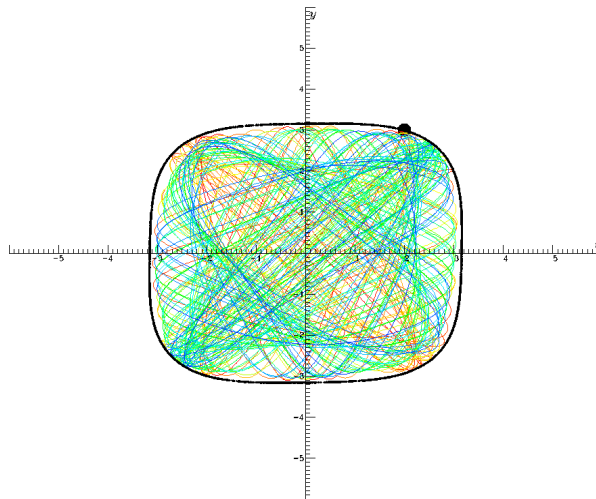
minimumhely $(x_1 = 1,3038; y_1 = 1,3038)$, $(x_2 = 1,2247; y_2 = -1,2247)$, $(x_3 = -1,3038; y_3 = -1,3038)$ és $(x_4 = 1,2247; y_4 = 1,2247)$, míg a (3.c) potenciálú tál esetén a minimumhelyek rendre $(x_1 = 0; y_1 = 4,0825)$, $(x_2 = 0; y_2 = -4,0825)$, $(x_3 = 7,0711; y_3 = 0)$ és $(x_4 = -7,0711; y_4 = 0)$.

A (2) mozgásegyenletek alapján a rendszert már szisztematikusan vizsgálhatjuk például a dinamikai rendszerek szimulációjára ideális *Dynamics Solver* program segítségével, amely ingyenesen letölthető a [8] oldalról.

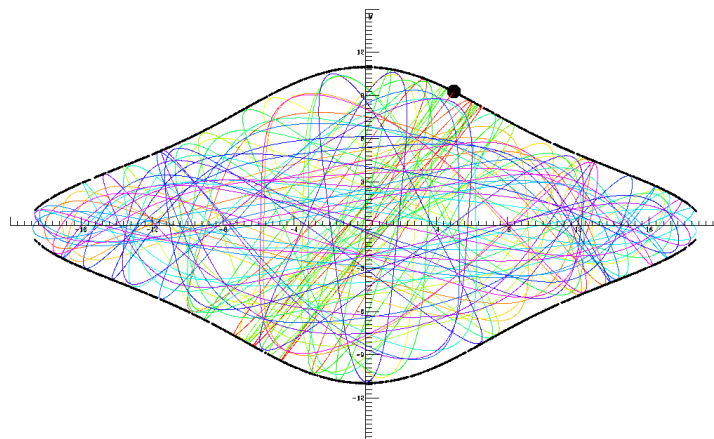
Nézzük először a valós térbeli mozgás szimulációját súrlódásmentes esetben. A legkönnyebben reprodukálható kezdeti feltétel az, ha a golyót a tál egy kijelölt pontjából kezdősebesség nélkül ($u_0 = v_0 = 0$) engedjük el (2.(a)-2.(c) ábrák). Ebben az esetben a golyó energiája a mozgás során állandó.



2. (a) ábra: a (3.a) potenciálú tál, $E = 20$ ($x_0 = 9; y_0 = 10,95445$)



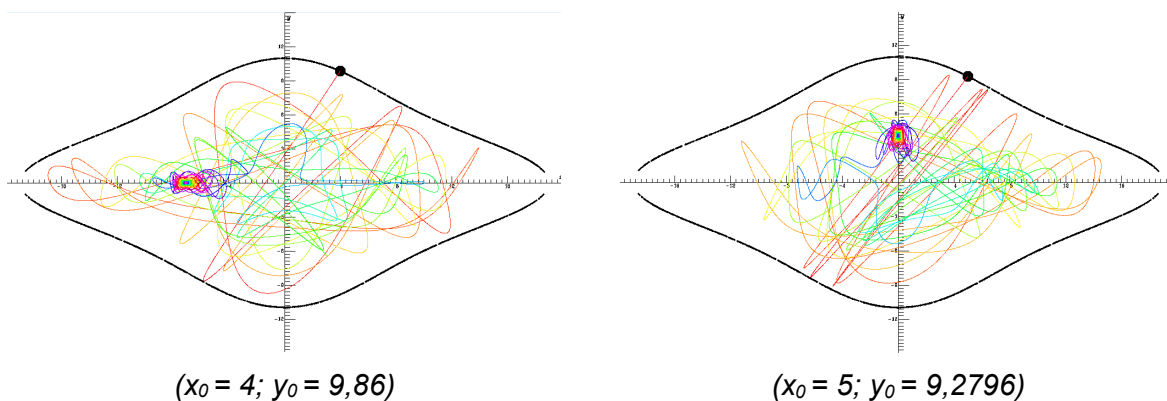
2. (b) ábra: a (3.b) potenciálú tál, $E = 10$ ($x_0 = 2; y_0 = 3$)



2. (c) ábra: a (3.c) potenciálú tál, $E = 10$ ($x_0 = 5; y_0 = 9,2796$)

Látható, hogy míg a (3.a) potenciálú tálban egyszerű, periodikus mozgást találunk, addig a (3.b), illetve (3.c) potenciálú tálban kaotikus mozgás jön létre (a Függelék I. szakaszának végén a káosz kialakulásához megfogalmazott egyik feltétel a (3.a) potenciál esetén nem teljesül). A továbbiakban a (3.b) és (3.c) potenciálokkal adott tálal foglalkozunk. A 2.(b) és 2.(c) ábrák alapján megállapíthatjuk, hogy *súrlódásmentes esetben a trajektória burkolója a tál alakját adja vissza*.

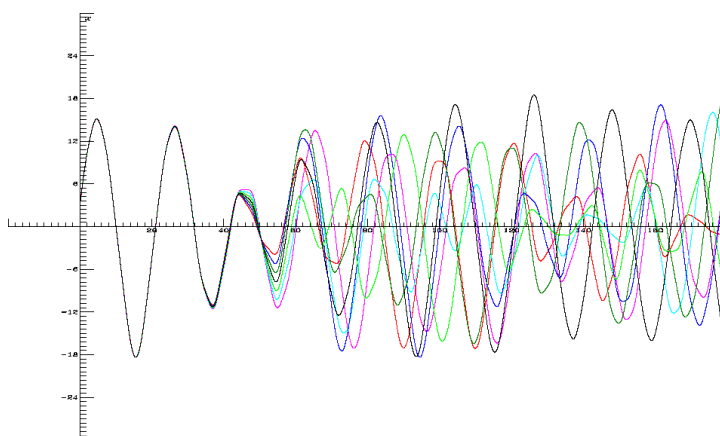
Tekintsük most az $\alpha \neq 0$ súrlódásos (disszipatív) mozgást. A 3. ábrán a (3.c) potenciálú tálban súrlódásos mozgást ($\alpha = 0.005$) végző golyó szimulációit mutatjuk be két különböző (igen közeli!) kezdeti feltételből (nyugalomból) indítva.



3. ábra: a (3.c) potenciálú tálban súrlódásos mozgást végző golyó trajektóriái

Megállapíthatjuk, hogy a fizikai szemléletnek megfelelően a trajektóriák kaotikus mozgás után valamelyik fentebb megadott minimumhelybe tartanak. Az ilyen típusú mozgást *transziens káosznak* nevezzük: a rendszer eleinte kaotikus, de végül valamilyen periodikus mozgáshoz, vagy nyugalmi helyzethez jut el, tehát a káosz csak véges időtartamú. Esetünkben a kaotikus mozgás attraktorai a négy (energia-) minimumhely által meghatározott nyugalmi helyzetek.

A káosz egyik *legalapvetőbb* vonása a *kezdőfeltételekre mutatott extrém érzékenység*, amelyet legszemléletesebben az úgynevezett *fáklya-diagrammon* mutathatjuk be. A diagramon különböző, egymáshoz nagyon közeli kezdőfeltételekből indított mozgások valamelyik jellemzőjét (például a helykoordináta egyik komponensét) ábrázoljuk az idő függvényében. A tipikus fáklya-diagram valóban fáklya alakra emlékeztet: bizonyos ideig a közeli kezdeti feltétellel indított mozgások együtt haladnak, később azonban drasztikusan szétválnak, és egy idő után jól látszik, hogy teljesen lehetetlen előrejelezni a golyó mozgását.



4. ábra: fáklyadiagram $E = 10$, $y_0 = 5$, $v_0 = 0$ és hét különböző x_0 kezdőfeltétel mellett

A (3.c) potenciállal adott tálban történő súrlódásmentes mozgás x - t grafikonját hét különböző, de egymáshoz nagyon közel eső ($x_0 = 2,97, 2,98, 2,99, 3,00, 3,01, 3,02$ és $3,03$) kezdőfeltétellel indítva ábrázoltuk (4. ábra). Látszik, hogy a $t = 50$ időpontig a grafikonok együtt mozognak, majd $t = 50$ után markánsan szétválnak. A mozgás tehát csak kb. 50 időegységig jelezhető előre. Ennél

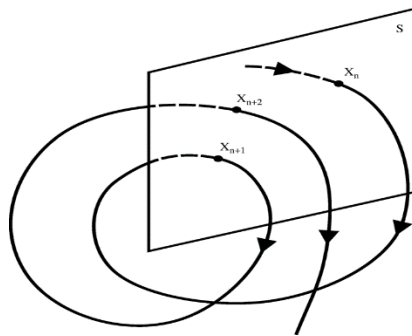
hosszabb időre az adható meg, hogy milyen valószínűséggel kerül a mozgó test adott állapot környezetébe. Mivel a bonyolult tálban mozgó golyó konzervatív rendszer, így az x értéke csak az E paraméter által meghatározott értékeken belül mozoghat, ezért a fáklya nem nyílik teljesen szét.

3. Súrlódásmentes mozgás

A mozgó golyó teljes mechanikai energiája adott pillanatban a mozgási és potenciális energia összege:

$$E(x, y, u, v) = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + V(x, y) \quad (4)$$

A kaotikus dinamika tanulmányozásához az ún. *Poincaré-leképezést* használjuk. Ennek során az n dimenziós fázistérben bolyongó trajektóriának csak valamely, kiválasztott $n-1$ dimenziós felületet átdőfő metszéspontjait (tehát már nem folytonos görbét, hanem diszkrét pontsorozatot), az ún. *Poincaré-metszetet* ábrázoljuk (5. ábra).



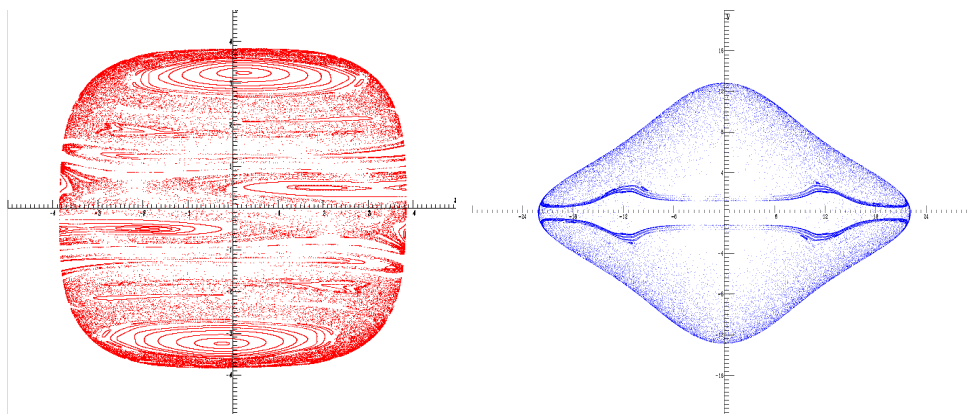
5. ábra: Poincaré-leképezés

Jelen esetben a fázistér 4 dimenziós (x, y, u, v) és valamely 2 dimenziós síkját szeretnénk a számítógép képernyőjén megjeleníteni a Poincaré-leképezés segítségével.

Konzervatív rendszerekben nincsenek attraktorok, a mozgás jellege a kezdeti feltételektől függ. A (4) energia-kifejezésre szükség van a Poincaré-térképek elkészítéséhez, mivel sok különböző, de azonos energiájú kezdőfeltételből kell indítanunk a rendszert a teljes kép kirajzolásához, azaz esetünkben a négy (x_0, y_0, u_0, v_0) kezdőértékből csak hármat választhatunk szabadon, a negyediket az energia értékéből határozzuk meg.

Végezzük el ezek után a szimulációkat a Dynamics Solver programmal. A fraktálokról figyelmükbe ajánljuk az F.II. függelékét.

Tekintsük először az $x - y$ fázissíkot. A 6.(a) és 6.(b) ábrákon a (3.b), illetve (3.c) potenciálú tálban súrlódásmentes mozgást végző golyó Poincaré-metszetét mutatjuk be.



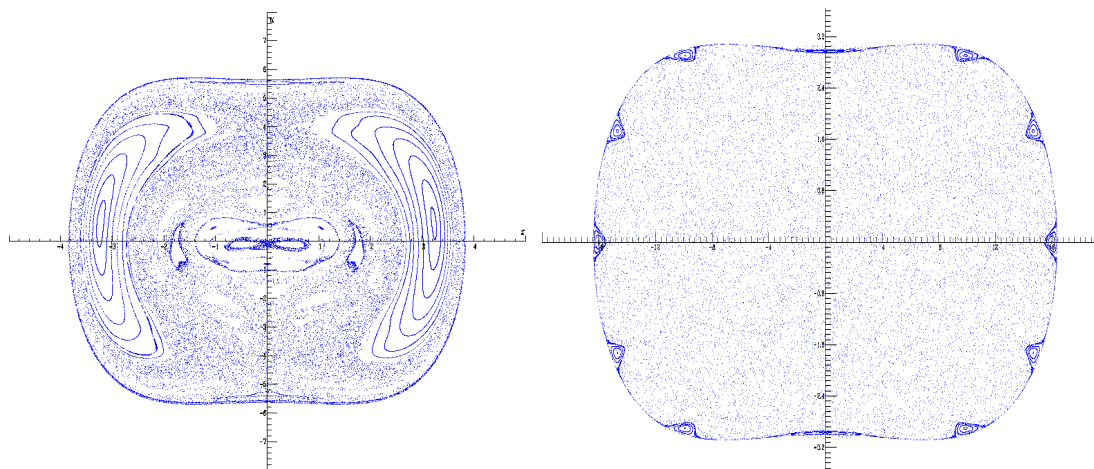
(a) (3.b) potenciálú tál

(b) (3.c) potenciálú tál

6. ábra: $x-y$ Poincaré-térképek $E = 20$ értéknél

A konzervatív káoszra jellemző térképet láthatjuk: a kövér fraktál (lásd F.II. függelékben) jellegű kaotikus tartományokat periodikus szigetek és tartományok szabdalják.

Tekintsük ezután az x - u fázissík Poincaré-térképeit!

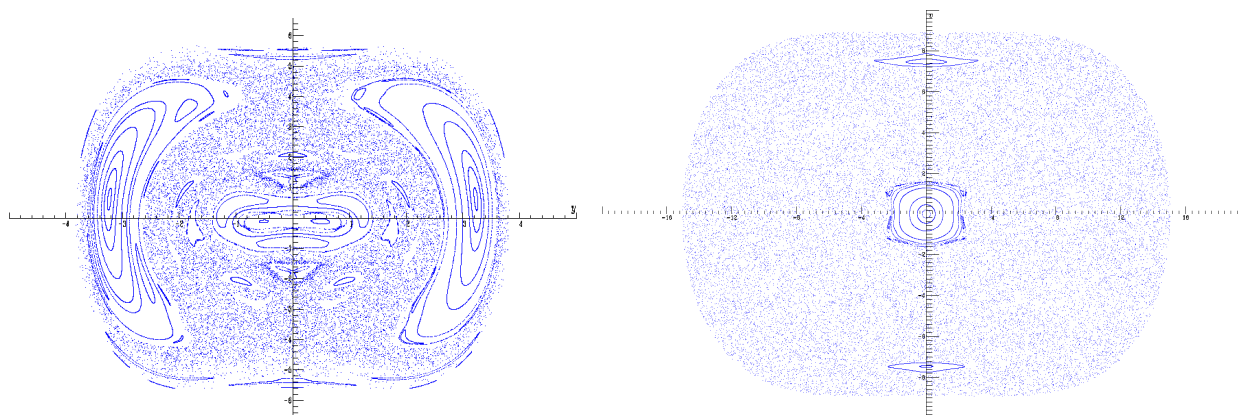


(a) (3.b) potenciálú tál ($E = 20$)

(b) (3.c) potenciálú tál ($E = 5$)

7. ábra: x - u Poincaré-térképek

Nézzük végül az y - v fázissík Poincaré-térképeit!



(a) (3.b) potenciálú tál ($E = 20$)

(b) (3.c) potenciálú tál ($E = 40$)

7. ábra: y - v Poincaré-térképek

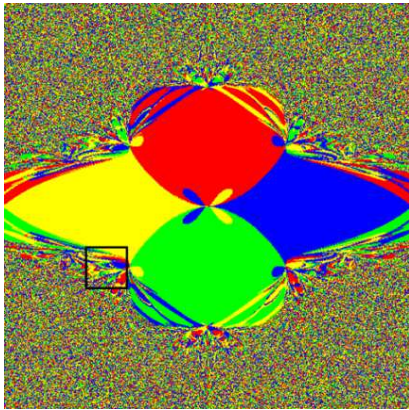
4. Súrlódásos mozgás

Láttuk, hogy a golyó a súrlódási tényezőtől függően valamelyik csúcshoz közeli mélyedésben áll meg. A disszipatív eset az ún. *tranzien káosz* jelenségét mutatja [9], ekkor a rendszer eleinte kaotikus, de végül valamilyen periodikus mozgáshoz, vagy nyugalmi helyzethez jut el, tehát a káosz csak véges időtartamú. A határ közvetlen közeléből indított mozgás eleinte hasonló ahhoz, amit a kaotikus attraktorokhoz tartozó mozgásoknál láttunk, de most az egyik periodikus határciklus-attraktorhoz konvergál. Tranzien káosz esetén tehát nyilvánvalóan nem létezik kaotikus attraktor, de létezik egy olyan ponthalmaz a fázistérben, amelyet a trajektóriák közül a hosszabb ideig kaotikusak nagyon megközelítenek, ez az ún. *nyereghalmaz*. A tranzien káosznál a kaotikus halmaz tehát nem az attraktor, hanem a nyereghalmaz. A tranzien káosz ideje alatt a trajektória a nyereghalmaz instabil pontjai között bolyong, majd eltávolodva tőle az egyik attraktorba „esik”. A vonzási tartományok határa a stabil sokaság, amely törtdimenziós, tehát fraktálgeometriájú.

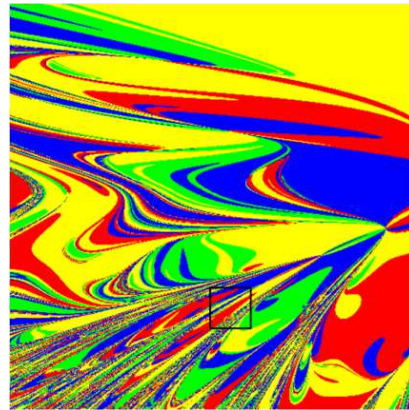
A tranzien káoszt mutató rendszerek közül legismertebb a mágneses inga, amellyel az általunk vizsgált rendszer szoros analógiát mutat (F.III. függelék). A mágneses inga mintájára térképezzük fel a tranzien káosz négy attraktorának (a tál 1.(c) ábrán látható négy gödrének)

vonzási tartományait a Dynamics Solver programmal. A négy attraktorhoz különböző színeket rendelünk és a térkép minden pontja olyan színt kap, mint az onnan kezdősebesség nélkül indított golyó végállapot-gödre. A négy attraktor színkódja rendre: $(x_1 = 0; y_1 = 4,0825)$ attraktor piros, $(x_2 = 0; y_2 = -4,0825)$ zöld, $(x_3 = 7,0711; y_3 = 0)$ kék és $(x_4 = -7,0711; y_4 = 0)$ sárga.

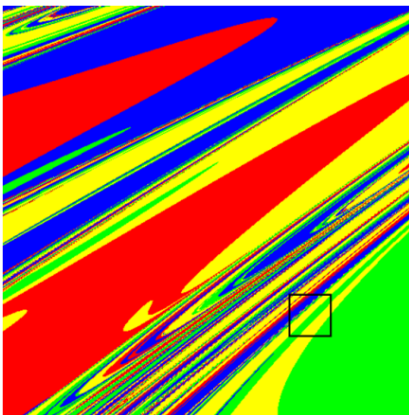
A 9. és 10. ábráson modellünk fraktál vonzási tartományait tanulmányozhatjuk. Mindkét ábráson a sor következő képe az előzőn kis fekete négyzettel kijelölt terület tízszeres nagyítású képét mutatja. Minden képen 500×500 pixeles ábrázolást alkalmazva, tehát minden következő ábrán 10-szeres zoom-olás történik, lényegében tehát növeljük a felbontást.



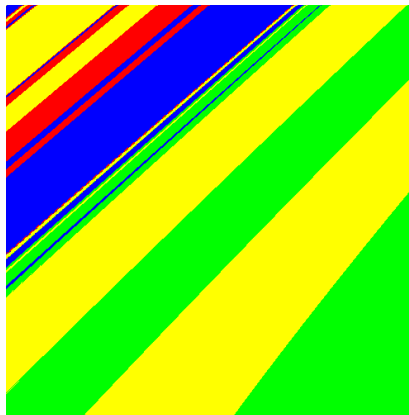
(a) $x, y \in [-10; 10]$



(b) $x \in [-6; -4], y \in [-4; -2]$



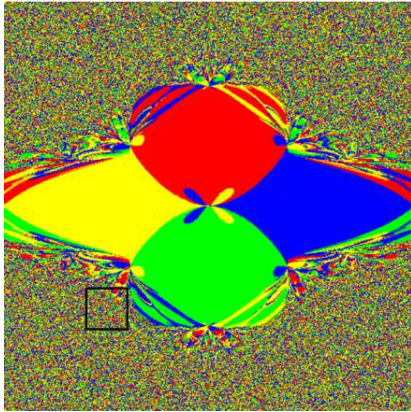
(c) $x \in [-5; -4,8], y \in [-3,6; -3,4]$



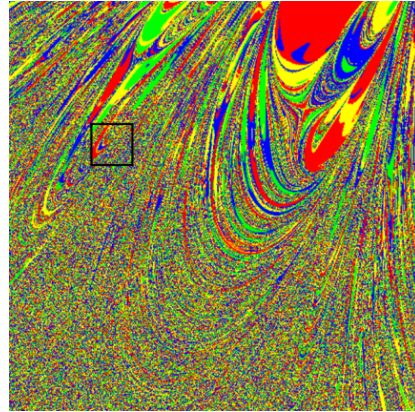
(d) $x \in [-4.86; -4.84], y \in [-3.56; -3.54]$

9. ábra: A (3.c) potenciállal adott tál vonzási tartományai a Dynamics Solver program segítségével ($\alpha = 0,01$ súrlódási együttható, 500×500 felbontás, nulla kezdősebesség)

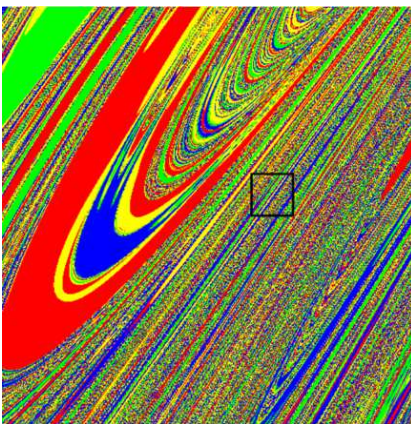
A 9. és 10. ábráson jól szemléltethető a vonzási tartományok ún. *Cantor-szálás* jellegű fraktálgeometriája: jellegzetes, hogy két látszólag szomszédos tartomány között a nagyítások során újabb és újabb tartományok tűnnek fel. Ez megfelel a klasszikus fraktáltulajdonság elvárásának. Viszont jelen esetben a klasszikushoz képest irreguláris viselkedést tapasztalunk, mivel a fraktálgeometriát jellemző paraméterek nem függetlenek az időtől és a vonzási tartományok struktúrája vizuálisan is jól érzékelhető módon nem invariáns a nagyítási sorozatra (szemmel láthatóan csökken a fraktáldimenziójuk), ellentétben azzal, ahogyan azt az F.II. függelékbeli példánál láttuk.



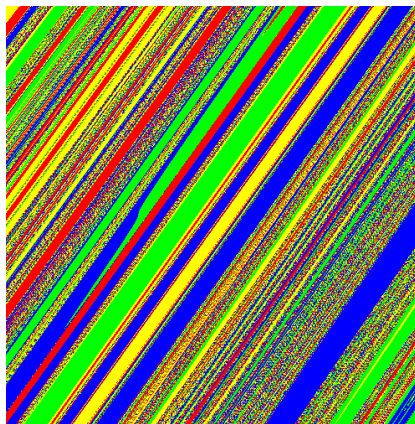
(a) $x, y \in [-10; 10]$



(b) $x \in [-6; -4], y \in [-6; -4]$



(c) $x \in [-5, 6; -5, 4], y \in [-4, 8; -4, 6]$



(d) $x \in [-5, 48; -5, 46], y \in [-4, 7; -4, 68]$

10. ábra: A (3.c) potenciállal adott tál vonzási tartományai a Dynamics Solver program segítségével ($\alpha = 0,01$ súrlódási együttható, 500×500 felbontás, nulla kezdősebesség)

Természetesen ez a tulajdonság numerikusan is nyomon követhető, ha meghatározzuk valamely tartomány fraktáldimenzióját különböző felbontások mellett. Az 1. táblázatban a 9.(c) és 10.(c) ábrákon látható tartományok számított fraktáldimenzióit láthatjuk növekvő felbontások során (a numerikus analízis nagy felbontások mellett akár sokórányi gépidőt is igényelhet).

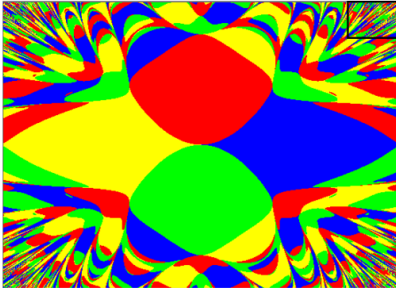
1. táblázat: A fraktáldimenzió irreguláris felbontás-függése

	$x \in [-5; -4, 8], y \in [-3, 6; -3, 4]$	$x \in [-5, 6; -5, 4], y \in [-4, 8; -4, 6]$
50×50	1,30	1,55
100×100	1,26	1,51
200×200	1,23	1,44
400×400	1,19	1,33
800×800	1,16	1,29

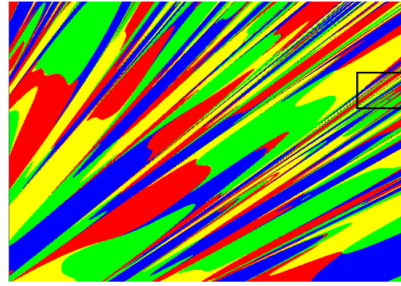
A táblázatból jól látható, hogy a fraktáldimenzió markánsan csökken a felbontás növelésével, extrém felbontások mellett a fraktáldimenzió értéke 1-hez tart, azaz a fraktáltulajdonság fokozatosan eltűnik. Ez a jelenség igen új felfedezés a káoszelméletben [10] és a *kettős tranziens káosz (double transient chaos)* néven vált ismertté és eddig csupán néhány rendszerben mutatták ki, fontos eredmény, hogy a mi egyszerű mechanikai modellünkben is kimutattuk.

Nagyobb (az előzőhöz képest ötszörös értékű) súrlódás esetén kissé más jellegű képet kapunk (11. ábra), ezúttal 8-szoros nagyítást alkalmazva az ábráson. A súrlódási paraméter

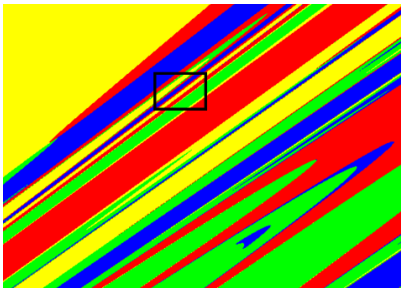
változtatásával megváltozik a vonzási tartományok szerkezete, ahogyan az a mágneses inga esetén is történt (lásd F.III. függelékbeli [16] videót).



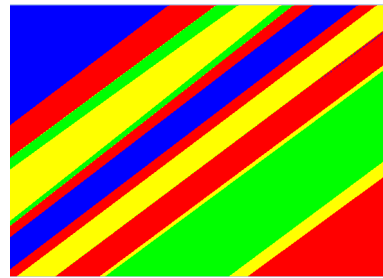
(a) $x \in [-11; 11], y \in [-8; 8]$



(b) $x \in [8, 25; 11], y \in [6; 8]$



(c) $x \in \left[10 \frac{42}{64}; 11\right], y \in [7, 25; 7, 5]$



(d) $x \in \left[10 \frac{402}{512}; 11\right], y \in \left[7 \frac{13}{32}; 7 \frac{14}{32}\right]$

11. ábra: A (3.c) potenciállal adott tál vonzási tartományai ($\alpha = 0,05$ súrlódási együttható, 550×400 felbontás, nulla kezdősebességgel indítva)

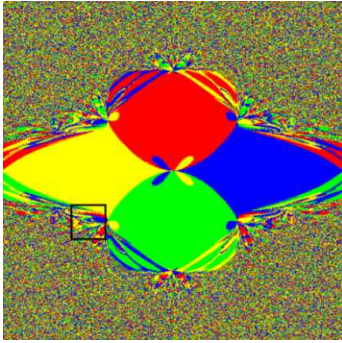
Végül vizsgáljuk meg, hogy mi történik, ha külső erőhatást, periodikus gerjesztést viszünk a rendszerbe. Tekintsük a továbbiakban a (3.c) potenciállal adott tálat és legyen például a tálban mozgó golyó acélból, a tál alá pedig helyezzünk egy kellően erős permanens mágneset, amely a z tengely mentén (tehát függőlegesen) harmonikus periodikus mozgást végez. A golyóra ható gerjesztési erő ekkor:

$$\vec{F}_d(t) = -k \frac{(\vec{r}_{\text{golyó}}(t) - \vec{r}_{\text{mágnes}}(t))}{|\vec{r}_{\text{golyó}}(t) - \vec{r}_{\text{mágnes}}(t)|^3}, \text{ ahol } \vec{r}_{\text{mágnes}}(t) = \left(0; 0; z_0 + z_a \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_z} t\right)\right), \quad (5),$$

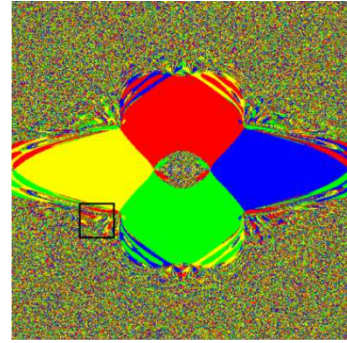
amelyben a k paraméter jelöli a mágnes és a golyó közötti csatolási állandót. A szimulációkat $z_0 = 0$, $z_a = 0,5$, $T_z = 0,1$ rögzített paraméterek mellett végeztük, változtatva a k csatolási paraméter értékét. Igen fontos és érdekes tény, hogy a rendszer kaotikus viselkedésének jellege megváltozik, ha a súrlódás mellé külső gerjesztést is adunk [9]. Kis csatolási paraméterérték esetén még tranzienst tapasztalunk, de a káosz karakterisztikus ideje növekszik a k növelésével és egy kritikus k (jelen esetben $k_{\text{krit}} = 1,1$) érték felett permanens káosz jelenik meg (a kritikus csatolás közelében a karakterisztikus idő a végtelenhez tart, amely analóg a fázisátalakulások kritikus lelassulási jelenségével).

A 12. ábrason a k csatolási paraméternek a vonzási tartományokra gyakorolt hatását szemlélhetjük. Vizuálisan is egyértelmű, hogy a k csatolási állandó növekedésével a vonzási tartományok határainak fraktáldimenziója növekszik.

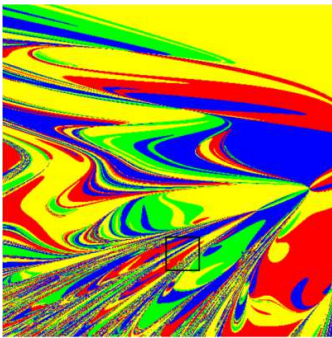
A 13. ábrason pedig egy rögzített tartományon demonstrálja a fraktálgeometria változását a k csatolási állandó függvényében. Az ábrákon látható $k = 0$, $k = 0,1$ és $k = 1,1$ csatolási paraméterértékeknél a fraktáldimenzió rendre 1,26, 1,79 és 2. Az utolsó dimenzióérték mutatja, hogy ha a csatolási állandó megközelíti a kritikus értéket, akkor vonzási tartományok szerkezete eltűnik és a tranzienst káoszt felváltja a permanens káosz.



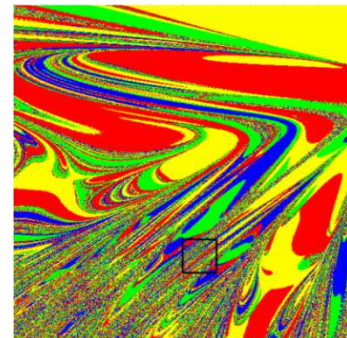
(a) $x, y \in [-10; 10]$



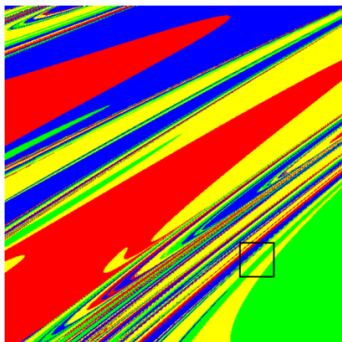
(A) $x, y \in [-10; 10]$



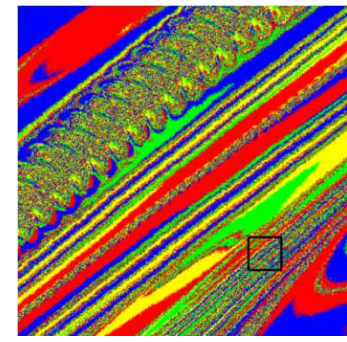
(b) $x \in [-6; -4], y \in [-4; -2]$



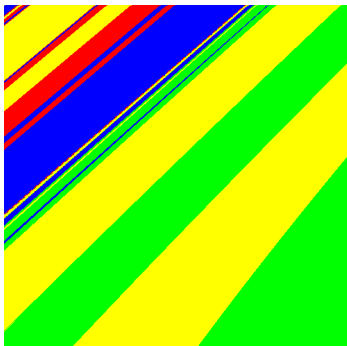
(B) $x \in [-6; -4], y \in [-4; -2]$



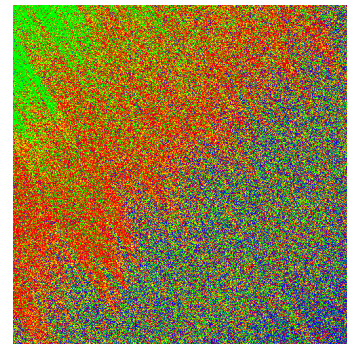
(c) $x \in [-5; -4, 8], y \in [-3, 6; -3, 4]$



(C) $x \in [-5; -4, 8], y \in [-3, 6; -3, 4]$

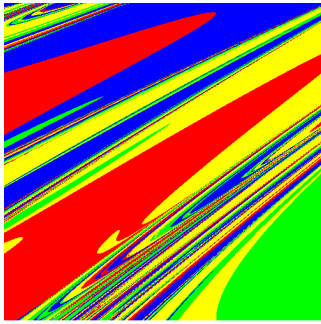
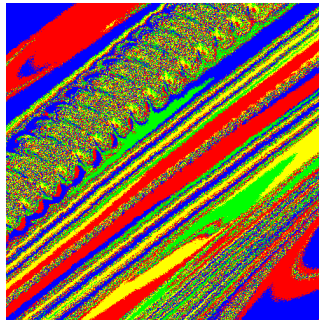
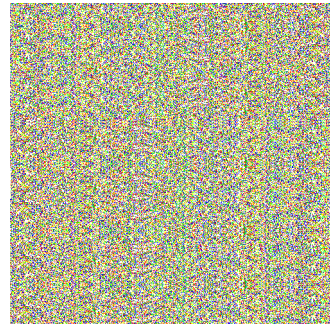


(d) $x \in [-4, 86; -4, 84], y \in [-3, 56; -3, 54]$



(D) $x \in [-4.86; -4.84], y \in [-3.56; -3.54]$

12. ábra: A (3.c) potenciállal adott tál vonzási tartományai ($\alpha = 0, 01$ súrlódási együttható, 500×500 felbontás, nulla kezdősebességgel indítva), a bal oldali (kis betűkkel jelölt) ábrák esetén $k = 0$, míg a jobb oldali (nagy betűkkel jelölt) ábráknál $k = 0, 1$

(a) $k=0$ (b) $k=0,1$ (c) $k=1,1$

13. ábra: A (3.c) potenciállal adott tál vonzási tartományai a Dynamics Solver program segítségével ($\alpha = 0,01$ sűrűlási együttható, 500×500 felbontás, nulla kezdősebességgel indítva) $x \in [-5; -4, 8]$, $y \in [-3, 6; -3, 4]$

Függelék

I. Kaotikus rendszerek leírása

Valamely dinamikai rendszer egy időpillanatbeli állapotának egyértelmű megadásához szükséges (minimális számú) $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ változók által kifeszített n dimenziós absztrakt teret *fázistér*nek nevezzük, így a rendszer állapotát minden pillanatban a fázistér egy pontja jelenti. A rendszer dinamikáját a változóinak $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerével adjuk meg:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}, \quad (\text{F.I.1})$$

amelyben az $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ függvényeket vezérlő-függvényeknek nevezzük.

Az $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ mozgásegyenletekkel adott dinamikájú rendszerben a $\Gamma = \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \dots \cdot \Delta x_n$ fázistérfogat időbeli változását a:

$$\dot{\Gamma} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right) \cdot \Gamma = \text{div} \bar{f} \cdot \Gamma$$

formula adja meg. Ha $\text{div} \bar{f}$ negatív, akkor a fázistérfogat csökken, az ilyen rendszereket nevezzük *disszipatív* rendszereknek, $\text{div} \bar{f} = 0$ esetén pedig *konzervatív* rendszerről beszélünk.

A rendszer pillanatnyi állapotát megadó fázistérbeli pont a rendszer időbeli változását követve elmozdul, egy *trajektórián* halad. A fázistér vonzó halmazát, amely felé a trajektóriák közelednek *attraktornak* nevezzük. Ezek lehetnek szabályos mozgásokhoz tartozó attraktorok (*fixpont*, vagy

határciklus), illetve szabálytalan (kaotikus) mozgást végző rendszer esetén *fraktál* (Függelék II.) típusú attraktorok..

A káosz olyan mozgás (időbeli változás), amely:

- *szabálytalan*, nem ismétli önmagát, nem periodikus,
- *előrejelezhetetlen, érzékeny a kezdőfeltételekre*, így hosszútávon valószínűségi leírás szükséges,
- határozott struktúrájú, *fraktál szerkezetű a fázistérben*.

Folytonos időváltozójú dinamika esetén a kaotikus mozgás akkor lehetséges, a ha a rendszer fázistere legalább 3 dimenziós és legalább egy vezérlőfüggvény nemlineáris jellegű.

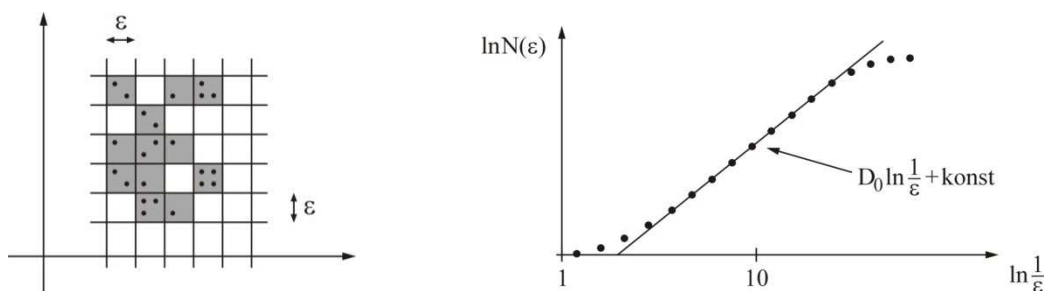
II. Fraktálok

A fraktálok olyan geometriai alakzatok, amelyek *skála-invariánsak*, azaz egzaktul, illetve közelítőleg vagy statisztikai értelemben *önhasonlóak* és *valamely geometriai jellemzőjük* (pl. terület, ívhossz, terület, felszín, vagy térfogat) *elfajult* (végtelen, vagy nulla értékű). A fraktálok egyik fontos jellemzője a (Hausdorff-féle) dimenziójuk.

A fraktáldimenzió meghatározásának egyik módja az ún. box-counting algoritmus: d dimenziós térbe ágyazott fraktálalakzatot úgy mérünk, hogy d dimenziós, ε méretű „kockákkal” fedjük le. A tapasztalat szerint $\varepsilon \ll 1$ esetén a lefedéshez szükséges dobozok N számára fennáll az alábbi összefüggés:

$$N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D_0} \quad (\text{F.II.1})$$

Ha D_0 kisebb, mint a tér d dimenziója, $D_0 < d$, akkor az alakzat *sovány fraktál* (elterjedt terminológia szerint ezeket nevezik fraktáloknak), és D_0 annak fraktáldimenziója (Mandelbrot, 1975). Vannak azonban olyan alakzatok, amelyekre $D_0 = d$, így véges V térfogatúak, mégis erősen tagoltak és önhasonlóak, tehát fraktál jellegűek, ezek az ún. *kövér fraktálok*.



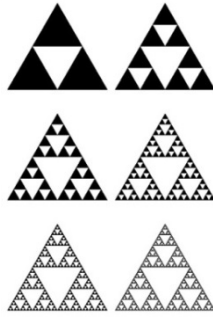
14. ábra: a box-counting módszer

A fraktál megjelenésének feltétele, hogy az (F.II.1) függvényre legalább két-három nagyságrenden keresztül egyenes illeszkedjék. Ekkor tehát a fraktáldimenzió becslése:

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \quad (\text{F.II.2})$$

Az ún. *determinisztikus fraktálokat* egyértelmű szabályokkal leírt *rekurzív* eljárásokkal generálják. Az alábbiakban két példát mutatunk be.

Az ún. *Sierpiński-háromszög* úgy áll elő, hogy egy szabályos háromszögből elhagyjuk az oldalfelező pontok összekötésével nyert belső háromszöget, majd az így maradt három háromszögre rekurzívan alkalmazzuk ugyanezt az eljárást. A Sierpiński-háromszög nyilvánvalóan egzaktul önhasonló fraktál.

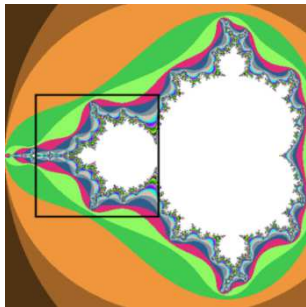


15. ábra: a Sierpienski-háromszög fraktál

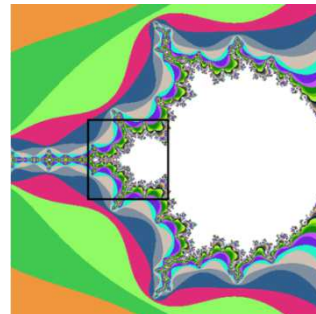
Az algoritmus alapján könnyen meghatározható a Sierpienski-háromszög fraktáldimenziója, hiszen a lineáris méret minden rekurziós lépésben felére csökken, tehát az n -edik lépésben $\varepsilon = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, míg a lefedéshez szükséges aktuális méretű dobozok száma megháromszorozódik, tehát $N = 3^n$, így (F.II.2) szerint:

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 3^n}{\ln 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \ln 3}{n \cdot \ln 2} = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1,585 \quad (\text{F.II.3})$$

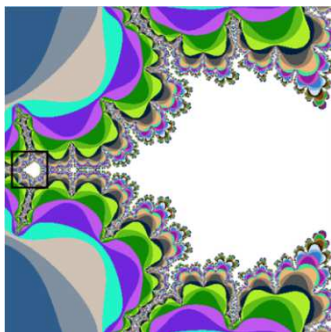
Az egyik leghíresebb és legtöbbet tanulmányozott fraktáلالakzat az ún. *Mandelbrot-halmaz*. Számítógépes ábrái az új ismeretterület gyakori jelképévé váltak. Önhasonló, de nem pontosan; nincs két részstruktúrája, ami matematikai értelemben is hasonló lenne, tehát közelítőleg önhasonló fraktál.



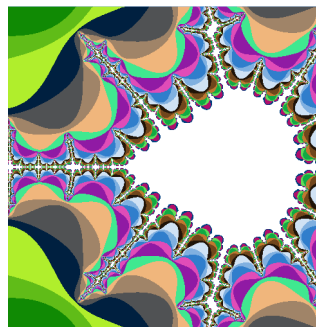
(a) $x \in [-2; 0,5], y \in [-1,25; 1,25]$



(b) $x \in [-1,75; -0,75], y \in [-0,5; 0,5]$



(c) $x \in [-1,5; -1,25], y \in [-0,125; 0,125]$



(d) $x \in [-1,495; -1,47], y \in [-0,0125; 0,0125]$

16. ábra: a Mandelbrot-halmaz (Dynamics Solver).

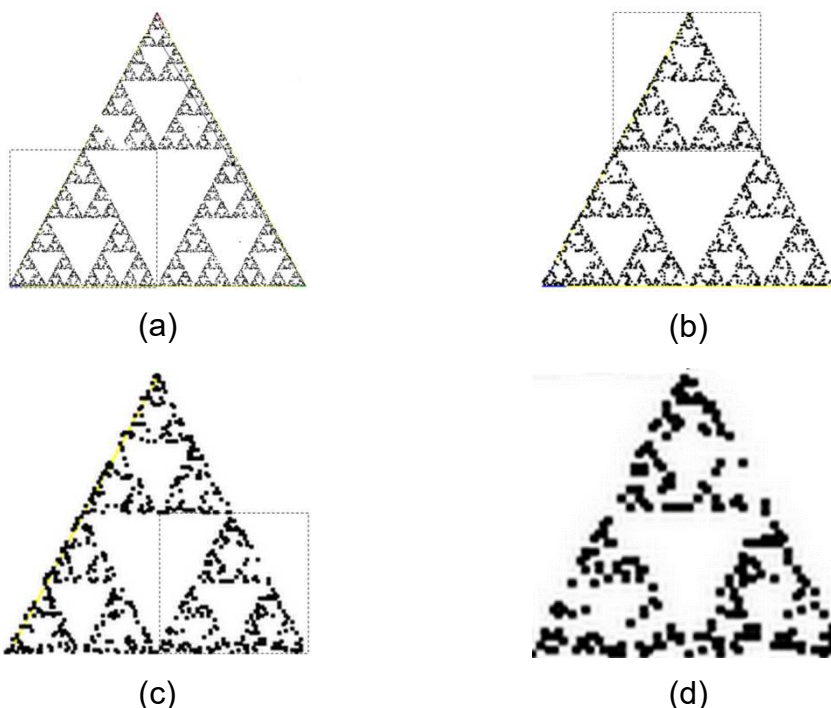
A 16. ábrán a Mandelbrot-halmazt jelenítettük meg a Dynamics Solver programmal, a fekete négyzettel jelölt területek kinagyításával. Jól érzékelhető a közelítő önhasonlóság fogalma, megtekintésre ajánljuk még az [11] oldalon található videót.

A fraktálokat létrehozó eljárások másik fontos csoportját alkotják az ún. *véletlen iterációs algoritmusok*, amelyekkel *sztochasztikus fraktálok* jönnek létre. Például az ún. teknőc-grafikában a toll mozgását bizonyos előre meghatározott szabályok irányítják; minden alkalommal ezek közül a szabályok közül választunk ki véletlenszerűen egyet (minden szabályhoz meghatározott kiválasztási valószínűség tartozik), és az adott lépésben a kiválasztott szabály irányítja a tollat. Ezeket a szabályokat ún. affin transzformációkkal definiálhatjuk. Egy kétdimenziós affin transzformáció nem más, mint egy olyan függvény, amelyben a méretváltoztatások, eltolások és forgatások szerepelnek. A véletlen iterációs algoritmusok alkalmazásának szép példája a valóságghú tájképek generálása (filmek, számítógépes játékok számára) [12].

Tekintsük példaként az alábbi egyszerű rekurzív algoritmust:

- Válassz véletlenszerűen egy pontot az ABC háromszög belsejében.
- (Dobj a kockával.
- Az aktuális pontot kösd össze
- az A csúccsal, ha 1 vagy 2 jött ki a kockán,
- a B csúccsal, ha 3 vagy 4 jött ki a kockán,
- a C csúccsal, ha 5 vagy 6 jött ki a kockán,
- az új aktuális pont az összekötő szakasz felezőpontja lesz.
- ugorj (1)-re.

Az algoritmus számítógépes (Java-applet) megvalósítása a [13] lapon megtalálható, ajánljuk a kipróbálását, mivel igen érdekes felfedezésre vezet.



17. ábra: a sztochasztikus Sierpienski-háromszög.

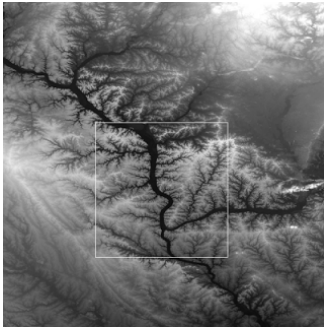
Látható, hogy a (2) lépés véletlenszerű mozzanatot (kockadobást) tartalmaz, tehát a generálási folyamat sztochasztikus jellegű. Igen meglepő és érdekes, hogy kellően sok pont megrajzolása után a fentebb megismert Sierpienski-háromszög diszkrét pontokból álló alakja jelenik meg. A 2. táblázatban a fentebb megismert box-counting algoritmussal számolt fraktáldimenzió értékeket tüntettük fel a nagyítási lépések során.

2. táblázat: A 17. ábrason látható véletlen Sierpienski alakzat fraktáldimenziója

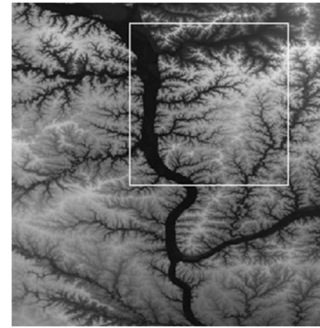
Kép	Zoom	Dimenzió
(a)	1	1.59
(b)	2	1.61
(c)	4	1.61
(d)	8	1.55

Látjuk, hogy méréseink igen jó közelítéssel az 1,585 elméleti értéket (F.II.3) adják, valamint, hogy több nagyítási lépés során lényegében állandó értékű (a kis szórás éppen a sztochasztikus jellegből adódik), ami a „hagyományos” fraktáljelleg alapvető aspektusa.

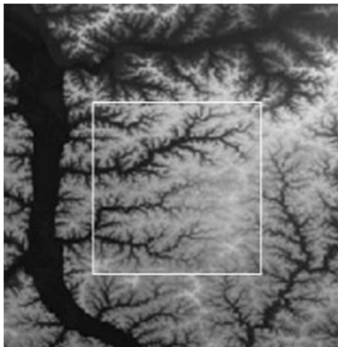
A fraktálszerűség a természetben is sokrétűen megjelenik. Számos természeti képződmény tekinthető közelítőleg fraktálnak, de a struktúra rendszerint nem tartalmaz három-hat rekurziós (skála) lépésnél többet. A természetben fellelhető fraktálok önhasonlósága nem szigorú; csak közelítő jelleggel, és statisztikusan érvényesül. Ilyenek bizonyos növények (pl. fák, páfrányok, pagodakarfiol), az érrendszerek, a folyórendszerek vagy a partvonalak. Példaként a Mississippi folyó felső folyásvidékének képét mutatjuk be a 18. ábrán [14].



(a)



(b)



(c)



(d)

18. ábra: Mississippi felső folyásvidékének szürkeskálás szinttérképe

A 3. táblázatban a box-counting algoritmussal számolt fraktáldimenzió értékeket tüntettük fel a nagyítási lépések során.

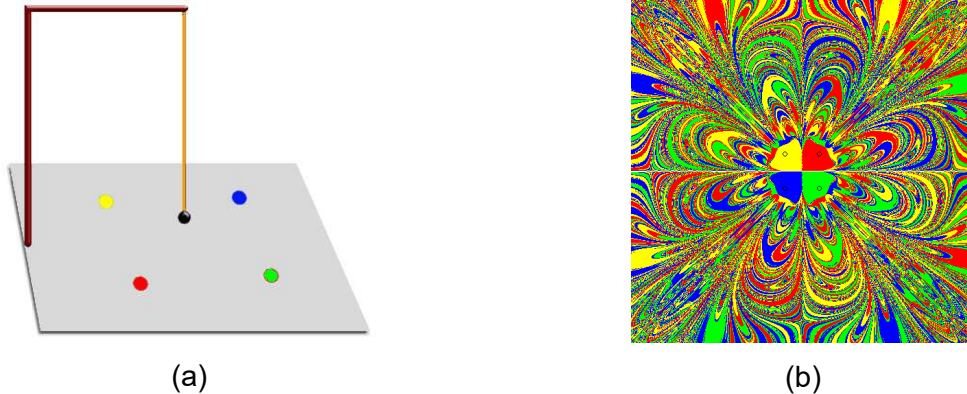
3. táblázat: A 18. ábrason fraktáldimenziója

Kép	Zoom	Dimenzió
(a)	1	1,78
(b)	2,5	1,77
(c)	5	1,73
(d)	10	1,70

Ismét meggyőződhetünk arról, hogy a fraktáldimenzió több nagyítási lépés során lényegében állandó értékű, ahogyan a klasszikus fraktálgeometriától elvárjuk.

III. Mágneses inga

A mágneses inga síklapon elhelyezett N darab mágnesből és felettük ingára rögzített acélgolyóból áll (19 (a) ábra). Az inga mozgása tranziens káoszt mutat: az adott kezdeti kitérésből indított inga egy ideig kaotikus mozgást végez, majd a súrlódásos veszteségek miatt végül valamelyik mágnes felett megáll (lásd pl. [5]). Feltérképezhető a mágnesek vonzási tartománya azaz, hogy mely helyzetekből indítva áll meg az inga az egyes mágnesek felett [15]. Fontos és izgalmas felfedezés, hogy a *vonzási tartományok fraktál geometriát mutatnak* (19 (b) ábra), valamint, hogy a fraktálszerkezet függ a súrlódás nagyságától [16].



19. ábra: mágneses inga ($N=4$) és a fraktál geometriájú vonzási tartományok.

Köszönetnyilvánítás

A tanulmány elkészítését a Magyar Tudományos Akadémia Tantárgy-pedagógiai Kutatási Programja támogatta.

Irodalomjegyzék

- [1] Nagy, P., Tasnádi, P.: *Chaotic motion of ball in a vessel: doubly transient chaos*, CHAOS 2015: Book of abstracts of the 8th Chaotic Modeling and Simulation International Conference, Henri Poincaré Institute, Paris, France, 2015. pp. 84-85.
- [2] P. Nagy, P. Tasnádi: *Irregular chaos in a bowl*, Program and book of abstracts: International Conference GIREP EPEC 2015., Wrocław: pp. 153-154.
- [3] P. Nagy, P. Tasnádi: *On the border-land between transient and permanent chaos*, Proceedings of Global Conference on Applied Physics and Mathematics, (1) AbstractsBook, (http://www.scienceknowconferences.com/files/abstracts_book/AbstractsBook_GCAPM2016.pdf), pp. 48.-49. , (2) Complete Communications of Conference (online electronic form) (http://www.scienceknowconferences.com/files/extended_abstracts/gcapm2016/), (ISBN: 978-84-944311-7-3)
- [4] Tóthné Juhász T., Gócz É.: *Káosz egy tálban*, Fizikai Szemle 2014./12., pp. 421.-425.
- [5] T. Tél, M. Gruiz: *Chaotic Dynamics*, Cambridge University Press
- [6] Gruiz M., Tél T.: *A káosz*, Fizikai Szemle 2005./5., pp. 191.-193.
- [7] Stonawski T.: *A digitális technika sodrában: Káosz a tálban*, Természettudomány tanítása korszerűen és vonzóan, szerk: Tasnádi P., ELTE TTK, pp. 311.-314., Budapest 2011. (ISBN 978-963-284-224-0)
- [8] <http://tp.lc.ehu.es/jma/ds/ds.html>
- [9] Y. Lai, T. Tél: *Transient Chaos*, Springer, New York 2011
- [10] Adilson E. Motter, Marton Gruiz, Gyorgy Karolyi, Tamas Tel: *Doubly Transient Chaos: The Generic Form of Chaos in Autonomous Dissipative Systems*, Phys. Rev. Lett. 111, 194101 (2013)
- [11] <http://www.youtube.com/watch?v=9G6uO7ZHtK8> (Mandelbrot zoom)
- [12] <http://plus.maths.org/issue6/turner2/2pdf/index.html/op.pdf>
- [13] <http://www.geoastro.de/ChaosSpiel/ChaosEnglish.html>
- [14] <http://pascals-puppy.blogspot.hu/2009/12/fractals-in-geology.html>
- [15] http://indavideo.hu/video/Magneses_inga_fraktal_vonzasi_tartomanyai
- [16] <https://www.youtube.com/watch?v=l11gxf3llb0>