

# A HINTÁZÁS LINEÁRIS, LÉPCSŐSFÜGGVÉNY-EGYÜTTHATÓS MODELLJÉNEK PERIODIKUS MEGOLDÁSÁIRÓL

## ON THE LINEAR, STEP-FUNCTION COEFFICIENT MODEL OF SWINGIG

Csizmadia László<sup>1\*</sup>, Hatvani László<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Természet- és Műszaki Alaptudományi Tanszék, GAMF Műszaki és Informatikai Kar, Pallasz Athéné Egyetem, Magyarország

<sup>2</sup> Hatvani László akadémikus, SZTE TTIK Bolyai Intézet, Szeged, Aradi vértanúk tere 1.

### Kulcsszavak:

másodrendű lineáris differenciálegyenletek, lépcsősfüggvény-együtthatók, periodikus együtthatók, impulzív hatások, periodikus megoldások, parametrikus rezonancia, hintázás

### Keywords:

second order linear differential equations, step-function coefficients, periodic coefficients, parametric resonance, swinging

### Cikktörténet:

Beérkezett 2016. szeptember 12.

Átdolgozva 2016. október 3.

Elfogadva 2016. október 10.

### Összefoglalás

Az alábbi egyenletet vizsgáljuk.

$$x'' + a^2(t)x = 0,$$
$$a(t) := \begin{cases} \sqrt{\frac{g}{l-\varepsilon}} & \text{if } 2kT \leq t < (2k+1)T, \\ \sqrt{\frac{g}{l+\varepsilon}} & \text{if } (2k+1)T \leq t < (2k+2)T, \quad (k = 0, 1, \dots) \end{cases}$$

ahol  $g$  és  $l$  jelöli rendre a gravitációs gyorsulás értékét, illetve az inga hosszát. Az  $\varepsilon > 0$  paraméter méri a hintázás intenzitását. Bevezetjük a közeledő és távolodó megoldás fogalmát. Szükséges és elegendő föltételt adunk a  $T$  és az  $\varepsilon$  paraméterek segítségével a  $2T$ -periodikus és a  $4T$ -periodikus megoldások létezésére.

### Abstract

The equation

$$x'' + a^2(t)x = 0,$$
$$a(t) := \begin{cases} \sqrt{\frac{g}{l-\varepsilon}} & \text{if } 2kT \leq t < (2k+1)T, \\ \sqrt{\frac{g}{l+\varepsilon}} & \text{if } (2k+1)T \leq t < (2k+2)T, \quad (k = 0, 1, \dots) \end{cases}$$

is considered, where  $g$  and  $l$  denote the constant of gravity and the length of the pendulum, respectively;  $\varepsilon > 0$  is a parameter measuring the intensity of swinging. Concepts of solutions going away from the origin and approaching to the origin are introduced. Necessary and sufficient conditions are given in terms of  $T$  and  $\varepsilon$  for the existence of solutions of these types, which yield conditions for the existence of  $2T$ -periodic and  $4T$ -periodic solutions as special cases. The domain of instability, i.e. the Arnold tongues of parametric resonance are deduced from these results.

\*Kapcsolattartó szerző.

E-mail cím: csizmadialaszlog@gmail.com

## 1. Bevezetés

Amint az tudott [1, 3, 17], a matematikai inga kis lengéseit leírja az alábbi lineáris differenciálegyenlet

$$x'' + \frac{g}{l}x = 0, \quad (1)$$

ahol  $x$  jelöli a rúd és a függőlegesen lefelé mutató irány közötti irányított szöget, melyet úgy irányítunk, hogy az óramutató járásával ellentétes irány a pozitív;  $g$  és  $l$  rendre a gravitációs konstans, illetve a rúd hossza. Az egyenlet összes megoldása periodikus ugyanazzal a  $2\pi\sqrt{l/g}$  periódussal, és az  $x = x' = 0$  egyensúlyi helyzet stabil. Úgy tekintünk a hintára, annak modelljére, mint egy változó hosszúságú ingára [13]. A hintázóról fölteszük, hogy célja: az egyensúlyi helyzet destabilizálása egymást követő föl-le mozgással. Ennek eredményeként a tömegközéppontjának távolsága az inga/hinta fölfüggesztési pontjától az időben periodikusan változik, amit leír a következő egyenlet

$$\begin{cases} x'' + a^2(t)x = 0, \\ a(t) := \begin{cases} a_1 := \sqrt{\frac{g}{l-\varepsilon}} & \text{ha } 2kT \leq t < (2k+1)T, \\ a_2 := \sqrt{\frac{g}{l+\varepsilon}} & \text{ha } (2k+1)T \leq t < (2k+2)T, \end{cases} \quad (k = 0, 1, \dots). \end{cases} \quad (2)$$

Ez egy periodikus együtthatós lineáris egyenlet (Hill-egyenlet [11, 15]), melyben az együttható intervallumonként konstans függvény (Meissner-egyenlet [16, 18]). A feladat abban áll, hogy adjuk meg a paramétertartományon  $(T, \varepsilon)$  az instabil zónákat a (2) egyenletre vonatkozóan (*parametrikus rezonancia*). A Floquet Elméletet használva bizonyítható [1, 2, 17], hogy a stabilitási tartományok egymástól különváló komponensek és ezen ún. Arnold-nyelveket határoló két görbe  $T = f(\varepsilon)$ ,  $T = g(\varepsilon)$  olyan pontokból áll, melyek megfelelnek a (2) egyenlet  $2T$ -periodikus, illetve  $4T$ -periodikus megoldásainak.

Ebben a dolgozatban [3] megmutatjuk, hogy a hintázás ezen problémáját elemi geometriai módszerekkel is tárgyalhatjuk. Föltételeket adunk arra, hogy a (2) egyenlet  $t \mapsto (x(t; x_0, x'_0), x'(t; x_0, x'_0))$  trajektóriája kiindulva az  $(x, x')$  fázissík  $P(x_0, x'_0)$  pontjából visszatérjen az  $L$  egyenes egy pontjába, mely  $L$  az origó  $(0,0)$  és  $P$  pontok között halad úgy, hogy  $(x(2T; x_0, x'_0), x'(2T; x_0, x'_0)) \in L$ . Egy ilyen megoldás vagy távolodik az origótól, vagy közeledik ahhoz, vagy  $2T$  vagy  $4T$  periodikus.

## 2. A módszer

A (2) egyenletet a [6] cikkben látott módon kezelhetjük, mely módszer továbbfejlesztve a [7] dolgozatban megtalálható. A módszer lényege, hogy adva két pozitív számsorozatot  $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ ,  $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$  úgy, hogy  $(\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty)$ , továbbá  $t_0 := 0$ , tekintsük a következő egyenletet

$$x'' + a^2(t)x = 0, \quad a(t) := a_k \text{ if } t_{k-1} \leq t < t_k \quad (k \in \mathbb{N}). \quad (3)$$

Az  $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  megoldása (3) egyenletnek, ha folytonosan differenciálható a  $[0, \infty)$  intervallumon, továbbá kétszer differenciálható és egyben megoldása az egyenletnek minden  $[t_{k-1}, t_k)$  intervallumon valamely  $k \in \mathbb{N}$  értékre. Bevezetve az új állapotváltozót  $y := x'/a_k$  (3) egyenlet 2-dimenziós rendszerként tekinthető

$$x' = a_k y, \quad y' = -a_k x \quad (t_{k-1} \leq t < t_k, k \in \mathbb{N}). \quad (4)$$

Garantálandó, hogy a (4) rendszer ekvivalens a (3) egyenlettel, elegendő előírni, hogy legyen  $x(t_k) = x(t_k - 0)$ ,  $x'(t_k) = x'(t_k - 0)$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), ahol  $f(t-0)$  jelöli az  $f$  függvény bal oldali határértékét a  $t$ -edik időpontban. Ennek azonnal következménye, hogy egy további „összefüggőségi” feltételt kapunk a (4) megoldásaira. Nevezetesen, az alábbi. Az első egyenlőséget mint kezdeti feltételt előírjuk a  $[t_k, t_{k+1})$  intervallumon. A másodikról ezek alapján láthatjuk, hogy  $a_{k+1}y(t_k) = a_k y(t_k - 0)$  minden  $k \in \mathbb{N}$  esetén,

ami egy újabb föltétel a  $[t_k, t_{k+1})$  intervallumon. Ez azt jelenti, hogy az (3) ekvivalens egy impulzív első rendű differenciálegyenlet-rendszerrel

$$\begin{cases} x' = a_k y, & y' = -a_k x & (t_{k-1} \leq t < t_k), \\ x(t_k) = x(t_k - 0), & y(t_k) = \frac{a_k}{a_{k+1}} y(t_k - 0) & (k \in \mathbb{N}). \end{cases} \quad (5)$$

Adva az  $x_0, y_0$  kezdeti értékeket, könnyen konstruálhatjuk a (5) megoldását a  $[0, \infty)$  intervallumon. Megoldjuk a (4) egyenletet ezzel a kezdeti föltételekkel az első részen:  $[t_0, t_1)$ , és így kapjuk a megoldást  $(x_1, y_1): [t_0, t_1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Ezután definiáljuk a következőket:  $x_2(t_1) := x_1(t_1 - 0)$ ,  $y_2(t_1) := (a_1/a_2)y_1(t_1 - 0)$  és megoldjuk a (4) egyenletet ezekkel a kezdeti föltételekkel a  $[t_1, t_2)$  szakaszon, és ezt folytatjuk tovább. Így eljutunk a (5) megoldásához a  $[t_0, \infty)$  félegyenesen a következő definíció segítségével

$$(x(t), y(t)) := (x_k(t), y_k(t)) \quad \text{if } t_{k-1} \leq t < t_k, \quad (k \in \mathbb{N}). \quad (6)$$

Mivel  $(x^2(t) + y^2(t))' \equiv 0$  az  $[t_{k-1}, t_k)$  intervallumon ( $k \in \mathbb{N}$ ), ezért azt mondhatjuk, hogy a trajektória darabjai az origó körüli körökön vannak, és, hogy a  $t = t_k$  időpillanatban a trajektória egy ugrást végez az  $y$ -tengellyel párhuzamosan.

Köszönhetően a speciális formának, az impulzív (5) rendszer reprezentálható mint diszkrét dinamikus rendszer az  $(x, y)$  síkon. Polárkoordinátákat bevezetve  $r, \varphi$  a szokásos formulákkal

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (r > 0, -\infty < \varphi < \infty). \quad (7)$$

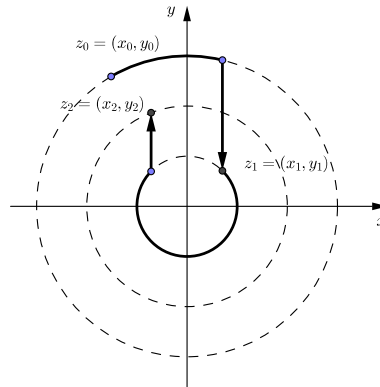
Tudjuk, hogy  $r'(t) \equiv 0$  bármely megoldás mentén minden  $[t_{k-1}, t_k)$  intervallumon. Így

$$x'(t) = -r(t)\varphi'(t) \sin \varphi(t) = a_k y(t) = a_k r(t) \sin \varphi(t) \quad (t_{k-1} \leq t < t_k),$$

kapjuk tehát, hogy

$$\varphi'(t) = -a_k \quad (t_{k-1} \leq t < t_k). \quad (8)$$

Vagyis, a folytonos komponensek origó körüli egyenletes forgatások  $a_k$  szögsebességgel, míg az impulzív lépések kontrakciók vagy dilatációk az  $y$ -tengellyel párhuzamos irányban, 1. ábra. Tekintsük a



1. ábra. A dinamika néhány lépése

polárkoordinátákban megadott rendszert. Jelölje  $(r_R, \varphi_R)$ , and  $(r_C, \varphi_C) = (\rho(r, \varphi; \kappa), \phi(\varphi; \kappa))$  az  $(r, \varphi)$  fázispont képét rendre a rotáció, illetve a kontrakció-dilatáció során. Ekkor  $r_R(r, \varphi) = r$ ,  $\varphi_R(r, \varphi) = \varphi - \theta$ ; továbbá,

$$\begin{aligned} \rho(r, \varphi; \kappa) &= \sqrt{x^2 + \kappa^2 y^2} = r \sqrt{1 + (\kappa^2 - 1) \sin^2 \varphi} = f(\varphi; \kappa) r, \\ f(\varphi, \kappa) &:= \sqrt{1 + (\kappa^2 - 1) \sin^2 \varphi}, \quad (\kappa > 0, -\infty < \varphi < \infty). \end{aligned}$$

Könnyű látni, hogy  $\tan \phi(\varphi; \kappa) = \kappa y/x = \kappa \tan \varphi$  ( $x \neq 0$ ), így

$$\phi(\varphi; \kappa) := \begin{cases} \arctan(\kappa \tan \varphi) + \left[ \frac{\varphi + \frac{\pi}{2}}{\pi} \right] & \text{ha } \varphi \neq (2k+1) \frac{\pi}{2}, \\ \varphi & \text{ha } \varphi = (2k+1) \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

ahol  $[x]$  jelöli az  $x \in \mathbb{R}$  egészrészét. Így a (5) rendszer polárkoordinátákban a következő alakot ölti

$$\begin{cases} r_{k+1} = f\left(\varphi_k - a_{k+1}(t_{k+1} - t_k); \frac{a_{k+1}}{a_{k+2}}\right) r_k, \\ \varphi_{k+1} = \phi\left(\varphi_k - a_{k+1}(t_{k+1} - t_k); \frac{a_{k+1}}{a_{k+2}}\right), \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (9)$$

Az alábbi lemma összefoglalja az  $f$  és a  $\phi$  függvények alapvető tulajdonságait. A lemma bizonyítás a [7] dolgozatban megtalálható.

**2.1. Lemma.** 1. Minden  $\kappa > 0$  esetén  $f(\cdot; \kappa) : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  páros és  $\pi$ -periodikus; továbbá,

$$f\left(\phi(\varphi; \kappa); \frac{1}{\kappa}\right) = \frac{1}{f(\varphi; \kappa)} \quad (\varphi \in \mathbb{R})$$

2. Minden  $\kappa > 0$  esetén  $\phi(\cdot; \kappa)$  és  $\phi(\cdot + \pi/2; \kappa) - \pi/2$  páratlan,  $\phi(\cdot + k\pi; \kappa) = \phi(\cdot; \kappa) + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ); továbbá,

$$\phi\left(\phi(\varphi; \kappa); \frac{1}{\kappa}\right) = \varphi \quad (\varphi \in \mathbb{R}).$$

3. Ha  $0 < \kappa < 1$ , akkor bármely  $k \in \mathbb{Z}$  esetén

$$\begin{aligned} \phi(\varphi; \kappa) < \varphi & \text{ if } 2k\frac{\pi}{2} < \varphi < (2k+1)\frac{\pi}{2}, \\ \phi(\varphi; \kappa) > \varphi & \text{ if } (2k+1)\frac{\pi}{2} < \varphi < 2(k+1)\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

4. Ha  $\kappa > 1$ , akkor a  $\phi(\varphi; \kappa)$  és  $\varphi$  közötti egyenlőtlenségek értelme megfordul.

### 3. Eredmények

Transzformáljuk a (2) egyenletet egy olyan egyenletté, amely explicite tartalmazza az rezgés periódusát mint paramétert. Bevezetjük a  $\tau = (\pi/T)t$  változót mint dimenziótlan időt és az új függő változót  $z(\tau) = x((T/\pi)\tau)$ . Ekkor a (2) a következő alakot ölti

$$\ddot{z} + A^2(\tau)z = 0, \quad (\dot{\phantom{z}}) = \frac{d}{d\tau}(\phantom{z}), \quad (10)$$

ahol

$$A(\tau) = \frac{T}{\pi} a\left(\frac{T}{\pi}\tau\right) = \begin{cases} \frac{T}{\pi} \sqrt{\frac{g}{l-\varepsilon}} & \text{ha } 2k\pi \leq \tau < (2k+1)\pi, \\ \frac{T}{\pi} \sqrt{\frac{g}{l+\varepsilon}} & \text{ha } (2k+1)\pi \leq \tau < (2k+2)\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}_+ := \{0, 1, \dots\}).$$

A kényelem kedvéért használjuk az időre továbbra is a  $t$ -t a  $\tau$  helyett, és az  $x$ ,  $x'$ -t a  $z$ ,  $\dot{z}$  helyett. Bevezetve a  $\lambda := T/\pi$  paramétert, (10) a következőbe megy át

$$\begin{aligned} x'' + \lambda^2 Q(t)x &= 0, \\ Q(t) &= \begin{cases} a_1^2 = a_1^2(\varepsilon) := \frac{g}{l-\varepsilon} & \text{ha } 2k\pi \leq t < (2k+1)\pi, \\ a_2^2 = a_2^2(\varepsilon) := \frac{g}{l+\varepsilon} & \text{ha } (2k+1)\pi \leq t < (2k+2)\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}_+). \end{aligned} \quad (11)$$

Legyenek

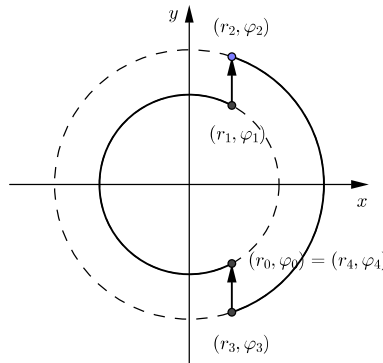
$$\begin{aligned} t_k &:= k\pi, & a_{2k+1} &:= \lambda a_1, & a_{2k+2} &:= \lambda a_2 & (k \in \mathbb{Z}_+), \\ D &:= \frac{a_1}{a_2}, & d &:= \frac{a_2}{a_1} \end{aligned} \quad (12)$$

így (11) a (3)-nek felel meg.

Miután (7) polárkoordinátázás megtörtént, tekintsük a fázissíkon a mozgást. Induljon a trajektória az  $r_0, \varphi_0$  pontból a  $t_0 = 0$  pillanatban. Az első öt olyan állapot, amit figyelniünk kell a következő

$$\begin{aligned}
 r_0 &:= r(0), & \varphi_0 &\equiv \varphi(0) \pmod{2\pi}, \quad -\pi \leq \varphi_0 < \pi; \\
 r_1 &:= r(\pi - 0) (= r_0), & \varphi_1 &:= \varphi(\pi - 0); \\
 r_2 &:= r(\pi) = f(\varphi_1; D) r_1, & \varphi_2 &:= \varphi(\pi) = \phi(\varphi_1; D); \\
 r_3 &:= r(2\pi - 0) (= r_2), & \varphi_3 &:= \varphi(2\pi - 0); \\
 r_4 &:= r(2\pi) = f(\varphi_3; d) r_3, & \varphi_4 &:= \varphi(2\pi) = \phi(\varphi_3; d),
 \end{aligned} \tag{13}$$

(az indexelés eltér a (9)-belitől!, lásd 2 ábra).



2. ábra. A dinamika eső négy lépése

**3.1. Definíció.** A mozgást leíró egyenletrendszer egy megoldását  $2\pi$  periódusú szögperiodikusnak (illetve  $4\pi$  periódusúnak) hívunk, ha

$$\varphi_4 \equiv \varphi_0 \pmod{2\pi} \quad (\text{illetve, ha } \varphi_4 \equiv \varphi_0 - \pi \pmod{2\pi}).$$

**3.2. Definíció.** A mozgást leíró egyenletrendszer  $2\pi$  vagy  $4\pi$  periódusú szögperiodikus megoldásait közeledőnek (illetőleg távolodónak) hívunk, ha

$$r_4 < r_0 \quad (\text{illetőleg, ha } r_4 > r_0).$$

Továbbá, a mozgást leíró egyenletrendszer egy megoldása  $2\pi$ -periodikus (illetve  $4\pi$ -periodikus) pontosan akkor, ha szögperiodikus és  $r_4 = r_0$ .

**3.1. Lemma.** 1. A rendszer egy szögperiodikus megoldása közeledő (illetőleg távolodó) pontosan akkor, ha

$$f(\varphi_1; D) < f(\varphi_0; D) \quad (\text{illetve, ha } f(\varphi_1; D) > f(\varphi_0; D)).$$

2. A rendszer egy  $2\pi$  vagy  $4\pi$  periódusú szögperiodikus megoldása ugyanazzal a periódussal periodikus akkor és csak akkor, ha

$$f(\varphi_1; D) = f(\varphi_0; D).$$

A bizonyítás megtalálható a [3] dolgozatban.

Ezek után kimondhatjuk fő eredményünket, megfogalmazva ezzel a (2) egyenlet periodikus megoldásai létezésének feltételét.

**3.2. Tétel.** Bármely  $\varepsilon > 0$  estén léteznek a  $\{T_k(\varepsilon)\}_{k=1}^\infty, \{\tilde{T}_k(\varepsilon)\}_{k=1}^\infty$  sorozatok úgy, hogy a (2) egyenletnek a  $T = T_k(\varepsilon)$  (illetve  $T = \tilde{T}_k(\varepsilon)$ ) értékekkel  $2T_k(\varepsilon)$ -periodikus (illetve  $4\tilde{T}_k(\varepsilon)$ -periodikus) megoldásai vannak. Továbbá,

$$0 < \tilde{T}_1 \leq \tilde{T}_2 < T_1 \leq T_2 < \tilde{T}_3 \leq \tilde{T}_4 < \dots; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} T_k = \infty, \tag{14}$$

és

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} 2T_{2p+1}(\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} 2T_{2p+2}(\varepsilon) = (2p+2) \left( \frac{1}{2} \left( 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \right) \right), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} 2\tilde{T}_{2p+1}(\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} 2\tilde{T}_{2p+2}(\varepsilon) = (2p+1) \left( \frac{1}{2} \left( 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \right) \right) \end{aligned} \quad (15)$$

érvényes minden  $p \in \mathbb{Z}_+$  esetén.

A bizonyítás megtalálható a [3] cikkben.

## Hivatkozások

- [1] Arnold, V. I. *Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [2] Butikov, E. I. Parametric resonance in a linear oscillator at square-wave modulation. *Eur. J. Phys.* **26** (2005), 157–174.
- [3] Csizmadia, L.; Hatvani, L. On the linear model of seinging with square wave coefficient by an elementary geometric method. *Acta Sci. Math.* **81** (2015), 483–502.
- [4] Curry, S. M. How children swing. *Amer. J. Phys.* **44** (1976), 924–926.
- [5] Csörgő, S.; Hatvani, L. Stability properties of solutions of linear second order differential equations with random coefficients. *J. Differential Equations* **248**(2010), no. 1, 21–49.
- [6] Hatvani, L. On the existence of a small solution to linear second order differential equations with step function coefficients. *Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems* **4** (1998), 321–330.
- [7] Hatvani, L. An elementary method for the study of Meissner's equation and its application to proving the Oscillation Theorem. *Acta Sci. Math.* **79**(2013), no. 1–2, 87–105.
- [8] Hatvani, L. On the parametrically excited pendulum equation with a square wave coefficient (in preparation).
- [9] Haupt, O. Über eine Methode zum Beweise von Oszillationstheoremen. *Math. Ann.* **76**(1914), 67–104.
- [10] Haupt, O. Über lineare homogene Differentialgleichungen 2. Ordnung mit periodischen Koeffizienten. *Math. Ann.* **79**(1917), 278–285.
- [11] Hill, G. W. On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the Sun and Moon. *Acta Mathematica* **8**(1886), 1–36.
- [12] Hochstadt, H. A special Hill's equation with discontinuous coefficients. *Amer. Math. Monthly* **70**(1963), 18–26.
- [13] Landau, L. D.; Lifshitz, E. M. *Mechanics*. Course of Theoretical Physics. Vol. 1, Elsevier, Amsterdam, 1976.
- [14] Lyapunov, A. M. The general problem of the stability of motion. Lyapunov centenary issue. *Internat. J. Control* **55**(1992), no. 3, 521–790.
- [15] Magnus, W.; Winkler, S. *Hill's equation*. Dover Publications, Inc., New York, 1979.
- [16] Meissner, E. Über Schüttel-schwingungen in Systemen mit Periodisch Veränderlicher Elastizität. *Schweizer Bauzeitung* **72**(1918), no. 10, 95–98.

- [17] D. R. Merkin, *Introduction to the Theory of Stability*. Springer-Verlag, 1997.
- [18] Seyranian, A. P.; Seyranian, A. A. Breakup of resonance zones for Meissner's equation with small damping. *Moscow University Mechanics Bulletin* (2003), No. 5, 53–59.