Gradus Vol 3, No 1(2016) 5-10
ISSN 2064-8014

A kiegészített szomszédsági komplexus vizsgálata

A study of extended neighborhood complex

Osztényi József[*]

Természet- és Műszaki Alaptudományi Tanszék, Gépipari és Automatizálási Műszaki Főiskolai Kar, Kecskeméti Főiskola, Magyarország

Kulcsszavak:
lexikografikus szorzat,
szomszédsági komplexus,
homotópia típus

Keywords:
lexicographic product,
neighborhood complex,
homotopy type

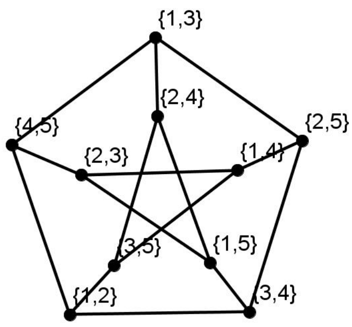
Cikktörténet:
Received
Revised
Accepted

Összefoglalás
Tetszőleges G átlós gráfra az $\mathcal{EN}(G)$ kiegészített szomszédsági komplexus pontra összehúzható, míg az $\mathcal{N}(G[K_m])$ szomszédsági komplexus homotóp ekvivalens egy gömbcsokorral. Azt sejtjük, hogy ez általában is igaz lesz. Azaz ha a G gráf az $\mathcal{EN}(G)$ komplexus pontra összehúzható, akkor az $\mathcal{N}(G[K_m])$ komplexus homotóp ekvivalens egy gömbcsokorral. Jelen cikkben az $\mathcal{EN}(G)$ komplexus pontra összehúzhatóságának feltételeit vizsgájuk.

Abstract
For a chordal graph G the extended neighborhood complex $\mathcal{EN}(G)$ contractible, while the neighborhood complex $\mathcal{N}(G[K_m])$ homotopy equivalent to a wedge of spheres. We conjecture that this will also be true in general. If for the graph G the complex $\mathcal{EN}(G)$ contractible, then $\mathcal{N}(G[K_m])$ homotopy equivalent to a wedge of spheres. In this note we study the conditions of contractible of the $\mathcal{EN}(G)$.

1. Bevezetés

Az első topologikus gráfszínezhetőségi tételt 1978-ban Lovász László igazolta Martin Kneser [7] feladatának megválaszolásához. Lovász az eredeti kérdést átfogalmazta egy gráfszínezhetőségi feladattá azzal, hogy definiálta a $KG_{m,n}$ Kneser gráfot. Tetszőleges $1 \leq n$ és $2n \leq m$ egészekre, a $KG_{m,n}$ *Kneser gráf* csúcsai az $[m] = \{1, 2, \ldots, m\}$ halmaz n-elemű részhalmazai, és két csúcs éllel van összekötve, ha azok mint halmazok diszjunktak.



1. ábra. A $KG_{5,2}$ Kneser gráf

Ilymódon a feladat a $KG_{m,n}$ gráf kromatikus számának meghatározására vezetett.

[*]Kapcsolattartó szerző.
E-mail cím: osztenyi.jozsef@gamf.kefo.hu

1.1. Tétel. *[Lovász [9]] A $KG_{m,n}$ Kneser gráf nem színezhető $m-2n+1$ színnel.*

Az így kapott kérdés megválaszolásához az alábbi általános, topologikus gráfszínezhetőségi tételt igazolta Lovász.

1.2. Tétel. *[Lovász [9]] Ha a G gráf szomszédsági komplexusának topologikus összefüggősége $(k-1)$, akkor a G gráf nem színezhető $k+1$ színnel.*

Gráfok s-szeres színezését 1972-ben Gilbert vezette be [6]-ben a rádiófrekvencia kiosztási problémával kapcsolatban. További gyakorlati problémák, úgymint flottaszervízelés, munkafeladatok ütemezése vagy forgalomszinkronizálás tanulmányozása is a gráfok s-szeres színezésének feladatára vezetnek [11]. Ugyanis ezen problémák matematikai modelljében a következő feladatot kell megoldanunk: egy megfelelő gráf csúcsaihoz egy bizonyos színhalmaz s elemű részhalmazainak egy olyan hozzárendelését adjuk meg, mely éllel összekötött csúcsokhoz diszjunkt részhalmazokat rendel.

Az s-szeres színezés egy, a hagyományos színezésen keresztül való értelmezését adhatjuk a $G[K_s]$ gráf, a G gráf K_s teljes gráffal vett lexikografikus szorzatának segítségével. Ezen értelmezés és Lovász 1.2 tétele alapján fogalmaztuk meg [3]-ben a következő, s-szeres színezésre vonatkozó topologikus gráfszínezhetőségi állítást.

1.3. Állítás. *[Csorba és Osztényi [3]] Ha a $G[K_s]$ gráf szomszédsági komplexusának topologikus összefüggősége $(k-1)$, akkor a G gráf nem színezhető s-szeresen $k+1$ színnel.*

Tehát, ha ismerjük a $G[K_s]$ gráf szomszédsági komplexusának homotópia típussát, akkor alsó becslést kapunk G s-szeres színezési számára. G átlós gráf esetén ez a helyzet, ugyanis tetszőleges G átlós gráfra a $G[K_s]$ lexikografikus szorzat ugyancsak átlós gráf. Csorba [2]-ban megmutatta, hogy egy átlós gráf szomszédsági komplexusa homotóp ekvivalens egy gömbcsokorral. Így átlós gráf esetén $\mathcal{N}(G[K_s])$ szomszédsági komplexus homotóp ekvivalens egy gömbcsokorral, míg az $\mathcal{EN}(G)$ kiegészített szomszédsági komplexus pontra összehúzható. A G gráf $\mathcal{EN}(G)$ kiegészített szomszédsági komplexusa [3]-ben került bevezetésre a $G[K_s]$ lexikografikus szorzat $\mathcal{N}(G[K_s])$ szomszédsági komplexusának az összefüggőségének a vizsgálata során. A [3]-beli eredmények szerint az $\mathcal{EN}(G)$-beli "lyukak" megjelennek $\mathcal{N}(G[K_s])$-ben s-től függetlenül. Míg abban az esetben, ha $\mathcal{EN}(G)$ pontra összehúzható, az $\mathcal{N}(G[K_s])$ komplexus összefüggősége nő s-sel. Azt sejtjük, hogy ha a G gráf az $\mathcal{EN}(G)$ komplexus pontra összehúzható, akkor az $\mathcal{N}(G[K_s])$ komplexus homotóp ekvivalens egy gömbcsokorral. Jelen cikkben az $\mathcal{EN}(G)$ komplexus pontra összehúzhatóságának feltételeit vizsgájuk.

2. Előkészületek

Jelen fejezetben összegyűjtjük az alapvető fogalmakat és jelöléseket. A fogalmak és konstrukciók részletes ismertetése megtalálható Bredon [1], Kozlov [8] és Matoušek [10] könyvekben.

2.1. Gráfelméleti elemek

Egy G gráf esetén mindig feltesszük, hogy véges, egyszerű és összefüggő. A csúcsok halmazát $V(G)$, az élek halmazát pedig $E(G)$ jelöli. A $G[K_m]$ *lexikografikus szorzat* csúcshalmaza $V(G)\times\{1,2,\dots,m\}$, és két csúcsa (u,i) és (v,j) akkor és csak akkor van éllel összekötve, ha uv éle G-nek vagy $u=v$ és $i\neq j$.

Egy G gráf *átlós*, ha bármely legalább 4 hosszú körében van átló. Az átlós gráfok karakterizációját adja Dirac alábbi tétele.

2.1. Tétel. *[Dirac [4]] Legyen G egy átlós gráf és H_1 egy G-beli maximális teljes részgráf. Ekkor a G-beli maximális teljes részgráfok sorbarendezhetőek $(H_1,H_2,\dots,H_k)$ úgy, hogy $H_j\cap(\cup_{i=1}^{j-1}H_i)$ egy G-beli teljes részgráf minden $2\leq j\leq k$.*

A gráfok s-szeres színezésének első precíz, matematikai megfogalmazását Stahl [5, 12] cikkeiben találjuk. Tetszőleges s pozitív egész esetén, egy G gráf *s-szeres színezése* során a gráf minden csúcsához s darab színt rendelük úgy, hogy szomszédos csúcsokhoz diszjunkt szín s-es tartozik. Világos, hogy a G gráf s-szeres színezése a hagyományos színezés általánosítása, amikor minden csúcshoz egy színt rendelünk. Továbbá a G gráf s-szeres színezései ekvivalencia osztályokat határoznak meg a $G[K_s]$ gráf hagyományos színezéseinnek halmazán. A $G[K_s]$ lexikografikus szorzat kromatikus számát Geller és Stahl [5]-ben vizsgálták.

2.2. Algebrai topológiai eszközök

Az $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ *n-dimenziós gömböt* jelölje $\mathbb{B}^n$, a határát $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$, azaz az *$(n-1)$-dimenziós gömbfelületet* pedig $\mathbb{S}^{n-1}$.

Az X és Y topologikus terekből az alábbi konstrukciókkal újabb topologikus tereket kapunk. Az egyik legegyszerűbb ilyen eljárás, amikor a két teret két, kitüntetett pontjuknál "összeragasztjuk". Azaz az $X \vee Y$ *wedge szorzat* legyen az $X \cup Y$ diszjunkt unió $\{x_0, y_0\}$-lal való faktorizáltja, ahol $x_0 \in X$ és $y_0 \in Y$ a kitüntetett pontok. Természetesen tetszőleges számú $\{X_i\}_{i\in I}$ térnek vehetjük a fentinek megfelelő $\bigvee_{i\in I} X_i$ wedge szorzatát. Speciálisan, ha valamennyi X_i gömbfelület, akkor a $\bigvee_{i\in I} X_i$ teret *gömbcsokornak* nevezzük. Egy másik, ugyancsak hasznos konstrukció a két tér *join szorzata* $X * Y$, ami az $X \times Y \times [0,1]/\approx$ faktortér, ahol a $\approx$ a következő ekvivalencia reláció: $(x, y, 0) \approx (x', y, 0)$ minden $x, x' \in X$ és $y \in Y$ esetén, és $(x, y, 1) \approx (x, y', 1)$ minden $x \in X$ és $y, y' \in Y$ esetén.

Legyen X_1, X_2 két topologikus tér. Az $f_1, f_2 : X_1 \to X_2$ leképezések *homotóp ekvivalensek* ($f_1 \sim f_2$), ha létezik $F : X_1 \times [0,1] \to X_2$ folytonos leképezés (homotópia) úgy, hogy $F(x,0) = f_1(x)$ és $F(x,1) = f_2(x)$ minden $x \in X_1$ esetén. Két topologikus tér, X_1, X_2 *homotóp ekvivalens*, illetve ugyanaz a *homotópia típusuk*, ha léteznek $f_1 : X_1 \to X_2$ és $f_2 : X_2 \to X_1$ leképezések úgy, hogy

$$f_2 \circ f_1 \sim id_{X_1} \quad \text{és} \quad f_1 \circ f_2 \sim id_{X_2},$$

jelben $X_1 \sim X_2$. Az egy pontú topologikus térrel homotóp ekvivalens teret *pontra összehúzhatónak* hívjuk.

Két topologikus tér homotópia típusának különbözőségét gyakran egyszerűen megállapíthatjuk a terekben található "lyukak" méretének segítségével. Ezen lyukak dimenzióját méri a topologikus összefüggőség. Az X topologikus tér *k-összefüggő*, ha tetszőleges $f : \mathbb{S}^j \to X$ folytonos leképezés kiterjeszthető egy $\mathbb{B}^{j+1} \to X$ folytonos leképezéssé, minden $0 \leq j \leq k$-ra. Azaz az X topologikus tér pontosan akkor k-összefüggő, ha minden $f : \mathbb{S}^j \to X$ folytonos leképezés homotóp ekvivalens egy $c : \mathbb{S}^j \to X$ konstans leképezéssel $0 \leq j \leq k$-ra.

2.3. Kombinatorikus topológiai eszközök

Absztrakt szimpliciális komplexuson egy $\mathcal{K} = (V, \mathcal{K})$ párt értünk, ahol V (*absztrakt*)*csúcsok* egy véges halmaza, $\mathcal{K}$ pedig V nem üres véges részhalmazainak, (*absztrakt*) *szimplexek* halmaza úgy, hogy $\emptyset \neq \sigma \subseteq \tau \in \mathcal{K}$ akkor $\sigma \in \mathcal{K}$. A $\mathcal{K}$ és $\mathcal{L}$ szimpliciális komplexusok *join szorzata* a $\mathcal{K} * \mathcal{L} = \mathcal{K} \cup \mathcal{L} \cup \{\sigma \cup \tau \ : \ \sigma \in \mathcal{K}$ és $\tau \in \mathcal{L}\}$ absztrakt szimpliciális komplexus. Valahányszor egy $\mathcal{K}$ szimpliciális komplexusnak valamilyen topologikus tulajdonságot adunk vagy valamilyen topologikus eljárást végzünk vele, akkor mindig egy geometriai realizáltjának poliéderére gondolunk.

Egy tetszőleges G gráf esetén a Lovász által [9]-ban bevezetett $\mathcal{N}(G)$ *szomszédsági komplexus* az az absztrakt szimpliciális komplexus, melynek csúcshalmaza $V(G)$, és a csúcsok egy A részhalmaza szimplex, ha van közös szomszédjuk G-ben. Jelölje 2^V a V halmaz összes részhalmazának halmazát. Az ugyancsak [9]-ban definiált $cn_G : 2^{V(G)} \to 2^{V(G)}$ szomszédsági leképezés egy A csúcshalmazhoz a közös szomszédjaik halmazát rendeli, azaz

$$cn_G(A) := \{v \in V(G) : (v, a) \in E(G) \text{ minden } a \in A\text{-ra}\}.$$

Ekkor $\mathcal{N}(G) = \{A \subseteq V(G) : \text{ létezik } v \in V(G) \text{ hogy } A \subseteq cn_G(v)\}$. Egy $B \subseteq V(G)$ csúcshalmazra bevezetjük az $\mathcal{N}(G)$ szomszédsági komplexus következő részkomplexusát

$$\mathcal{CN}_G(B) := \{A \subseteq V(G) \setminus B : \text{ létezik } v \in B, \text{ hogy } A \subseteq cn_G(v)\}.$$

Egy tetszőleges G gráf esetén az $\mathcal{EN}(G)$ *kiegészített szomszédsági komplexus* csúcs halmaza $V(G)$, és a csúcsok egy A részhalmaza szimplex, ha van olyan v csúcsa G-nek, melyre $A \subseteq cn_G(v) \cup \{v\}$. A szomszédsági leképezés kiegészítettjeként definiáljuk a $cn^*_G : 2^{V(G)} \to 2^{V(G)}$ leképezést, mely egy A csúcshalmazhoz a következőt rendeli

$$cn^*_G(A) := cn_G(A) \cup A$$

Ekkor

$$\mathcal{EN}(G) = \{B \subseteq V(G) : \text{ létezik } v \in V(G), \text{ hogy } B \subseteq cn^*_G(v)\}.$$

3. A kiegészített szomszédsági komplexus vizsgálata

Először a K_m teljes gráfok kiegészített szomszédsági komplexusának homotópia típusát határozzuk meg.

3.1. Állítás. *[]Tetszőleges $m > 0$ egészre a K_m teljes gráf $\mathcal{EN}(K_m)$ kiegészített szomszédsági komplexusa pontra összehúzható.*

Bizonyítás. Definíció szerint a K_m teljes gráf kiegészített szomszédsági komplexusa egy m csúcsú szimplex. □

Ezután a G átlós gráfok kiegészített szomszédsági komplexusának a homotópia típusának a meghatározásához a következő állítást látjuk be.

3.2. Állítás. *[]Legyen a G gráf két indukált részgráfja G_1 és G_2, melyekre $G_1 \cap G_2$ teljes gráf és $G = G_1 \cup G_2$. Ekkor*

$$\mathcal{EN}(G) \simeq \mathcal{EN}(G_1) \cup \mathcal{EN}(G_2).$$

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy

$$\mathcal{EN}(G) \cong \mathcal{EN}(G_1) \cup \mathcal{EN}(G_2) \cup (\mathcal{EN}(G_1 \cap G_2) * \mathcal{CN}_G(G_1 \cap G_2)).$$

Ugyanis $\mathcal{EN}(G) \setminus \mathcal{EN}(G_1) \cup \mathcal{EN}(G_2)$-beli A szimplexekre létezik $v \in V(G_1 \cap G_2)$, hogy $A \subseteq cn^*_G(v)$, továbbá $A \cap V(G_1) \setminus V(G_1 \cap G_2) \neq \emptyset$ és $A \cap V(G_2) \setminus V(G_1 \cap G_2) \neq \emptyset$. Viszont abból, hogy $G_1 \cap G_2$ teljesgráf, következik:

$$\{A \subseteq V(G) : \exists\, v \in V(G_1 \cap G_2), \text{ hogy } A \subseteq cn^*_G(v)\} \cong \mathcal{EN}(G_1 \cap G_2) * \mathcal{CN}_G(G_1 \cap G_2).$$

Azaz az $\mathcal{EN}(G)$ azon részkomplexusa, melynek szimplexei valamely $v \in V(G_1 \cap G_2)$-re a $cn^*_G(v)$ részhalmazai, egy szimplex és egy komplexus join szorzata. A [10]-beli 4.4.3-as állítása alapján ez a szorzat k-összefüggő minden k-ra, így a 80. oldalon található megjegyzés szerint pontra összehúzható.

Továbbá ezen komplexus metszete az $\mathcal{EN}(G_1)$ és $\mathcal{EN}(G_2)$ komplexusokkal is pontra összehúzható:

$$\mathcal{EN}(G_1) \cap (\mathcal{EN}(G_1 \cap G_2) * \mathcal{CN}_G(G_1 \cap G_2)) \cong \mathcal{EN}(G_1 \cap G_2) * \mathcal{CN}_{G_1}(G_1 \cap G_2),$$

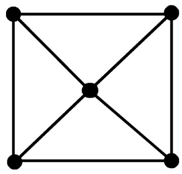
$$\mathcal{EN}(G_2) \cap (\mathcal{EN}(G_1 \cap G_2) * \mathcal{CN}_G(G_1 \cap G_2)) \cong \mathcal{EN}(G_1 \cap G_2) * \mathcal{CN}_{G_2}(G_1 \cap G_2).$$

Így a [8]-beli 15.25. tétele szerint $\mathcal{EN}(G)$ valóban homotóp ekvivalens $\mathcal{EN}(G_1) \cup \mathcal{EN}(G_2)$-vel. □

3.3. Állítás. *[]Tetszőleges G átlós gráf esetén $\mathcal{EN}(G)$ pontra összehúzható.*

Bizonyítás. A Dirac tétel-beli felbontásra alkalmazva az előző állítást kapjuk az állítást. □

Tehát az átlós gráfok mindegyikére $\mathcal{EN}(G)$ pontra összehúzható, ám ennél bővebb az a gráfosztály, mely elemeire $\mathcal{EN}(G)$ pontra összehúzható. Úgyanis az alábbi G gráf kiegészített szomszédsági komplexusa egy szimplex, viszont van benne egy 4 hosszú kör, melynek egyik átlója sincs G-ben.

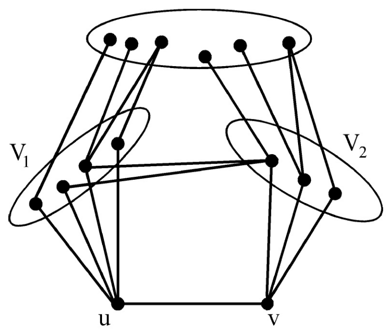


2. ábra. Egy nem átlós G gráf, melyre $\mathcal{EN}(G)$ pontra összehúzható

Igaz, hogy van átlómentes 4 hosszú köre a fenti G gráfnak, ám minden éle éle egy G-beli háromszögnek. Ez egy szükséges feltétele $\mathcal{EN}(G)$ pontra összehúzhatóságának.

3.4. Tétel. *[]Ha a G gráfnak van olyan $u_0v_0 \in E(G)$ éle, mely nem éle egyetlen G-beli háromszögnek sem, de éle egy legalább 4 hosszú körnek. Ekkor $\mathcal{EN}(G)$ nem pontra összehúzható.*

Bizonyítás. Vezessük be a $V_1 = cn_G(u_0) \setminus \{v_0\}$ és $V_2 = cn_G(v_0) \setminus \{u_0\}$ jelöléseket.



3. ábra

Megjegyezzük, hogy az $\mathcal{EN}(G)$ komplexus előáll a $2^{cn^*_G(w)}$ komplexusok uniójaként. Ezek után vegyük $\mathcal{EN}_1 \cup \mathcal{EN}_2$ felbontását az $\mathcal{EN}(G)$ komplexusnak, ahol

$$\mathcal{EN}_1 = 2^{cn^*_G(u_0)} \cup 2^{cn^*_G(v_0)} = 2^{V_1 \cup \{u_0,v_0\}} \cup 2^{V_2 \cup \{u_0,v_0\}}$$

$$\mathcal{EN}_2 = \left(\bigcup_{w \in V(G) \setminus \{u_0,v_0\}} 2^{cn^*_G(w)} \right) \cup 2^{V_1 \cup \{u_0\}} \cup 2^{V_2 \cup \{v_0\}}.$$

Két esetet kell megkülönböztetnünk:

1. eset, ha nem vezet él G-ben a V_1 és V_2 csúcshalmazok közt. Ekkor

$$\mathcal{EN}_1 \cap \mathcal{EN}_2 = 2^{V_1 \cup \{u_0\}} \cup 2^{V_2 \cup \{v_0\}},$$

így

$$\mathcal{EN}(G) \simeq \mathcal{EN}_2 \vee \mathbb{S}^1.$$

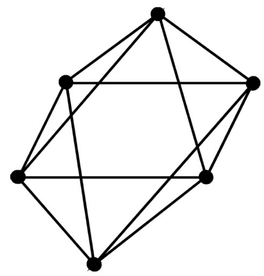
Tehát ebben az esetben $\mathcal{EN}(G)$ nem pontra összehúzható.

2. eset, ha vezet él G-ben V_1 és V_2 csúcshalmazok közt. Legyen két ilyen csúcs $u_1 \in cn_G(u)$ és $v_1 \in cn_G(v)$. Ekkor

$$\mathcal{EN}_1 \cap \mathcal{EN}_2 = 2^{V_1 \cup \{u_0\}} \cup 2^{V_2 \cup \{v_0\}} \cup (\mathcal{CN}_G(V_1) * u_0) \cup (\mathcal{CN}_G(V_2) * v_0)\,.$$

Ebben az $\mathcal{L} = \{\{u_0\}, \{u_1\}, \{v_0\}, \{v_1\}, \{u_0, u_1\}, \{u_1, v_0\}, \{v_0, v_1\}, \{v_1, u_0\}\}$ részkomplexus homeomorf $\mathbb{S}^1$-gyel. $\mathcal{L}$ nem pontra összehúzható $\mathcal{EN}_1 \cap \mathcal{EN}_2$-ben, viszont pontra összehúzható $\mathcal{EN}_1$ és $\mathcal{EN}_2$ komplexusokban. Tehát ebben az esetben sem pontra összehúzható $\mathcal{EN}(G)$. $\square$

Ám nem elegendő, ugyanis a következő gráf minden éle benne van egy G-beli háromszögben, mégis $\mathcal{EN}(G) \cong \mathbb{S}^4$.



4. ábra. Egy háromszögekből álló G gráf, melyre $\mathcal{EN}(G)$ nem pontra összehúzható

Hivatkozások

[1] G. Bredon. *Topology and geometry*, volume 139 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997.

[2] P. Csorba. On the simple $\mathbb{Z}_2$-homotopy types of graph complexes and their simple $\mathbb{Z}_2$-universality. *Canadian Mathematical Bulletin*, 51(4):535–544, 2008.

[3] P. Csorba and J. Osztényi. On the topological lower bound for the multichromatic number. *Discrete Mathematics*, 310(8):1334–1339, 2010.

[4] G. Dirac. On rigid circuit graphs. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 25:71–76, 1961.

[5] D. Geller and S. Stahl. The chromatic number and other parameters of the lexicographic product. *Journal of Combinatorial Theory*, 19:87–95, 1975.

[6] E. Gilbert. Unpublished technical memorandum. iu, 1972.

[7] M. Kneser. Aufgabe 300. *Jber. Deutsch. Math. Verein.*, 55, 1955.

[8] D. N. Kozlov. *Combinatorial algebraic topology*, volume 21 of *Algorithms and Computation in Mathematics*. Springer, Berlin, 2008.

[9] L. Lovász. Kneser's conjecture, chromatic number and homotopy. *Journal of Combinatorial Theory*, 25(3):319–324, 1978.

[10] J. Matoušek. *Using the Borsuk-Ulam Theorem: Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry*. Universitext. Springer, Heidelberg, 2nd printing edition, 2008.

[11] R. Opsut and F. Roberts. *On the fleet maintenance, mobile radio frequency, task assignment, and traffic phasing problems*, pages 479–492. Wiley, New York, 1981.

[12] S. Stahl. n-tuple colorings and associated graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, 20:185–203, 1976.