

# KAOTIKUS ATTRAKTOROK 3D-S MEGJELENÍTÉSE

## 3D VIEWING OF CHAOTIC ATTRACTORS

Nagy Péter<sup>1\*</sup>, Tasnádi Péter<sup>2</sup>

<sup>1</sup> GAMF Műszaki és Informatikai Kar, Neumann János Egyetem, Kecskemét

<sup>2</sup> Természettudományi Kar, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest

---

### **Kulcsszavak:**

káoszelmélet,  
különös attraktorok,  
projektfeladat,  
lézeres gravírozás,  
3D-s nyomtatás.

### **Keywords:**

chaos theory,  
chaotic attractor,  
students project,  
laser engraving,  
3D printing.

### **Cikktörténet:**

Beérkezett 2018. augusztus 01.

Átdolgozva 2018. szeptember 04.

Elfogadva 2018. október 01.

---

### **Összefoglalás**

A káoszelmélet napjainkban a fizika egyik legdinamikusabban fejlődő, legintenzívebben kutatott területe, amely egyre inkább beépül a fizika oktatásába is. Jelen cikkünkben egy újszerű metódust kínálunk a kaotikus rendszerek leírásában központi szerepet betöltő ún. különös attraktorok 3D-s szemléltetéséhez. A különös attraktorok számítógépek képernyőjén ábrázolt 2-dimenziós vetítései hasznosak, ám a 3D-s megjelenítések igazi élményt jelentenek a vizuális emberi elme számára és kiválóan alkalmasak a diákok érdeklődésének felkeltésére. Az általunk készített és honlapunkról letölthető MAPLE programok segítségével előállíthatók a standard formátumú grafikus fájlok, így nagyon különleges kézbe vehető alakzatok gyárthatók le.

### **Abstract**

The interest in the theory of chaos has risen rapidly and up till now much effort has been invested in integrating it into the curricula. Our paper offers the teachers a method for the demonstration of the strange attractors which play a central role in the theory of chaotic systems. The images of the 2D projection of the strange attractors are well known and common, however their 3D visualisation give a real sensation for the human brain so they are much more suitable for capturing the students' interest. With the help of our downloadable MAPLE programs the graphic files of strange attractors can be easily generated and their 3D images can be engraved in glass or can be printed with 3D-printers.

---

## 1. Bevezetés

Amióta alig néhány évtizeddel ezelőtt Edward Lorenz elsőként megmutatta, hogy egyszerű (kis szabadsági fokú) determinisztikus rendszerekben megjelenhet előrejelezhetetlen, véletlenszerű mozgásforma, a káoszelmélet a fizika egyik legdinamikusabban fejlődő területe lett. Szemléletformáló jelentőségénél fogva sürgetővé vált az oktatásba való beépítése is. Számos kiváló monográfia található az alapvető fogalmak és módszerek bemutatására (pl. [1]), illetve az egyszerű mechanikai rendszerekben megjelenő kaotikus viselkedés tanulmányozására [2] [3] [4]. E cikk szerzői korábbi munkáikban újszerű mechanikai rendszerekben mutatták be a kaotikus tulajdonságokat [5][6].

A számítógépek megjelenése a fizika számára is új dimenziót nyitott, létrejött a számítógépes kísérleti fizika, mint teljesen újszerű vizsgálati terület. A számítógépes szimulációk segítségével olyan modellekről tudunk releváns kvantitatív információt nyerni, amelyek korábban egyáltalán nem,

---

\* Kapcsolattartó szerző. Tel.: +36 20 4798204  
E-mail cím: nagy.peter@gamf.uni-neumann.hu

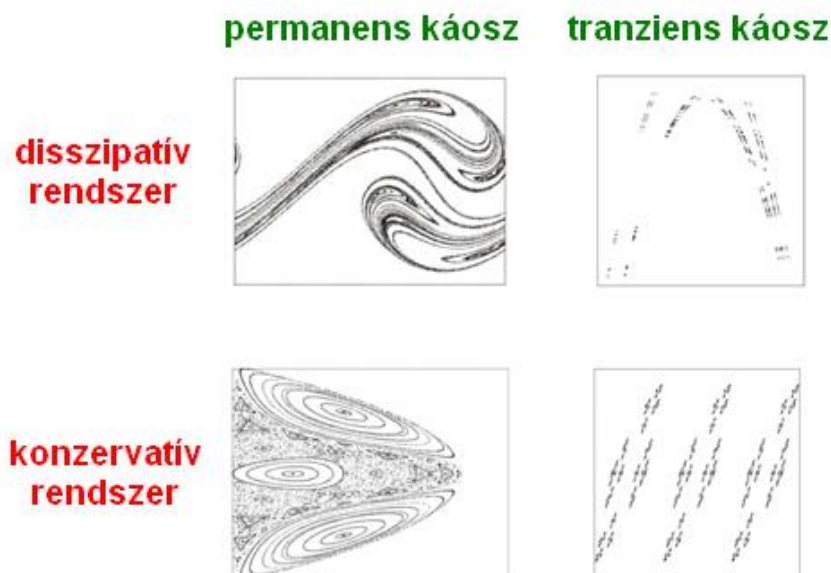
vagy csak kvalitatív módon voltak tárgyalhatók. A kaotikus rendszerek vizsgálata az egyik legfontosabb és legismertebb példája a számítógépes kísérleti fizikának, egyszersmind a káosz jelenségköre kiemelt szemléletformáló erővel bír a fizika oktatásában. Ugyanakkor a számítógépes szimulációk készítése programozói tudást és készségeket feltételez, ami sokakat elriaszt. Jelen tanulmányunkban új lehetőséget szeretnénk adni a káoszelmélet oktatásához a kaotikus rendszerek leírásában központi szerepet betöltő különös attraktorok valós, tárgyiasult megjelenítésével, remélve, hogy ez motiváló, figyelemfelkeltő eszköz lehet minden a téma iránt érdeklődő számára.. A bemutatásra kerülő módszerekhez szükséges elektronikus anyagok letölthetők a [7] honlapunkról. A rendelkezésre álló szűk terjedelemben nem lehet célunk didaktikus tárgyalást adni a káoszelmületről, de segítségképpen a Függelékben tömören összefoglaljuk a legfontosabb fogalmakat.

## 2. 3-dimenziós kaotikus attraktorok megjelenítése

Folytonos időváltozójú rendszerek esetén a kaotikus viselkedés megjelenésének szükséges feltétele minimum három nemlineáris differenciálegyenlet által vezérelt dinamika, tehát a fázistér minimálisan három dimenziós. A sokdimenziós fázistérben áttekinthetetlen nyomon követni a trajektórián mozgó fázispontot. Egyik lehetséges módszer a trajektória valamilyen altérre való vetítéseit használja, jellemzően a számítógép képernyőjén megjeleníthető 2-dimenziós projekcióját ábrázoljuk, mely során viszont információvesztés történik. Másik lehetőség az ún. *Poincaré térkép (-leképezés)*: a trajektóriának csak egy kiválasztott felületet átdöfő (egy adott altérbe eső) metszéspontjait ábrázoljuk, melyek diszkrét pontsorozatot alkotnak. A gerjesztett rendszerek esetén használt ún. *stroboszkópikus leképezés* egy speciális Poincaré-leképezés, amely a trajektória gerjesztési periódusidőnként (azaz állandó fázisértékeknél) vett mintájaként kapott (általában fraktál geometriájú) pontsorozat.

De miért fontos az attraktorok geometriájának tanulmányozása?

A káoszelmélet egyik alapvető alapvetése a dinamikai rendszer viselkedési jellege és az attraktorának topológiája közötti kapcsolat (1. ábra). Az attraktorok látványos 3-dimenziós megjelenítései segíthetnek ezen kapcsolat szemléltetésében.



1. ábra: a rendszer dinamikája és az attraktor geometriája közötti kapcsolat

Az ember természetes adottságai révén vizuális lény, így minden kézzelfogható, valós térbeli megjelenítése valamilyen absztrakt fogalomnak nagy didaktikai jelentőséggel bír. A 3-dimenziós képek 2-dimenziós projekciói alapvetőek és közismertek, ugyanakkor a valós 3-dimenziós

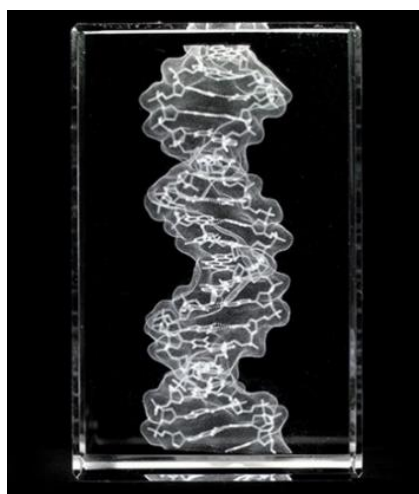
megjelenítés igazi vizuális élmény az emberi elme számára és jó lehetőség a diákok érdeklődésének felkeltésére. Az alábbiakban két megjelenítési módszert mutatunk be.

## 2.1. Lézeres üveggravírozás

A lézeres üveggravírozás segítségével 3D-s képeket jeleníthetünk meg szilárd, átlátszó anyagokban (jellemzően különböző üvegtestekben, kristályokban) [8]. Az eljárás során a képpontokat két tengelyen mozgatott tükörrel vezérelt lézertény hozza létre. A lencse által fókuszált lézertény a kiválasztott pontban olyan energiasűrűségű, hogy lokálisan jellemzően néhány mikronos anyagváltozást (diszlokáció, olvadás, forrás) hoz létre az üvegben, amelyet a fényszórás miatt fehéres színű pontként érzékelünk. Az elmúlt 15-20 évben a felszín alatti lézergravírozás (SSLE) hatékony és viszonylag olcsó eljárássá vált 3D-s képek ajándéktárgyként való elkészítésére, számos cég kínál lehetőséget képek, fényképek üvegtestbe gravírozására. Érdekes példaként említjük Bathsheba Grossman grafikus művészt, aki a 2000-es évek elejétől kínál [9] honlapján igen szép és érdekes 3D-s képeket a legváltozatosabb témákban.



2. ábra: lézer gravírozó berendezés



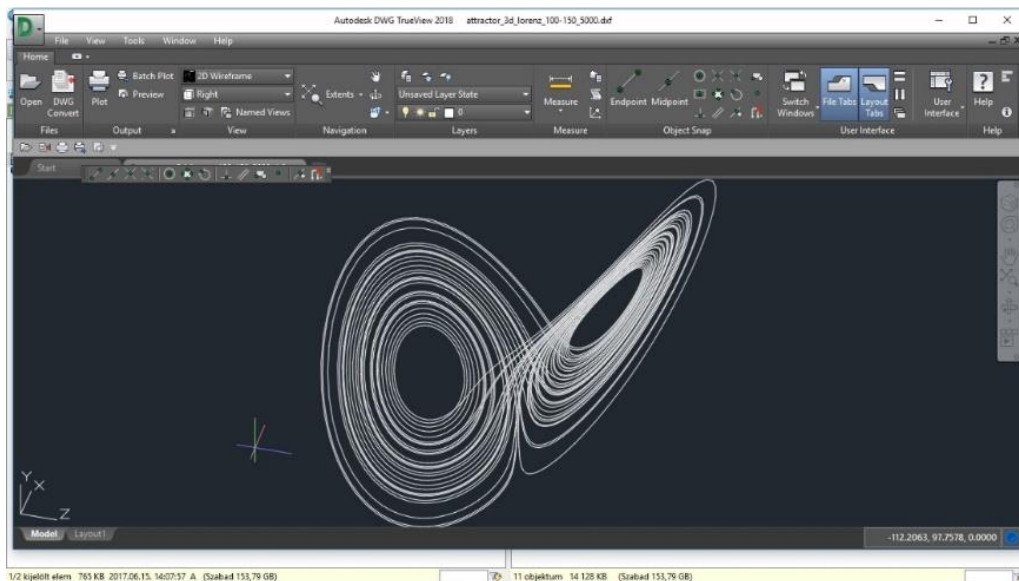
DNA modell üvegben [9].

A lézergravírozó berendezések STL, DXF, OBJ, 3DS és 3DMAX formátumú grafikus fájlokat tudnak feldolgozni és megjeleníteni. Mi a DXF (Drawing Exchange Format) fájlformátumot választottuk, mivel ez egyszerű ASCII kóddal standard szerkezetű formában tartalmazza a grafikus adatokat [10]. A rendszer dinamikáját megadó (F.1.) differenciálegyenlet-rendszer numerikus megoldása során adott időlépésenként nyert fázispont-sorozatot elemi vonalsorozattá alakítva a szabvány szerint kódolva írjuk DXF fájlba az attraktort egy általunk írt MAPLE program segítségével. Az így kapott DXF fájl beolvasásával a lézergravírozó berendezés elkészíti az attraktorunk üvegtestbe megjelenített képét (ha nem áll rendelkezésre lézergravírozó berendezés, akkor számos internetes lehetőség van, hogy a kiválasztott cégnek a DXF fájl elküldve elfogadható áron elkészítsék számunkra, mi magunk is ezt az utat jártuk).

A MAPLE programot úgy készítettük el, hogy tetszőleges 3-dimenziós dinamikai rendszerre könnyen adaptálható legyen: csupán a pirossal megjelölt (kommentezett) sorokban kell a választott modell információit átírni. Az optimális használhatóság érdekében a program két szekcióra tagolt: az első szekció futtatásával tanulmányozhatjuk, módosíthatjuk a modellünket az attraktor 3-dimenziós megjelenítésével a MAPLE programon belül, a második szekció futtatásával a már véglegesített attraktor képét írhatjuk ki DXF fájlba. A kapott DXF fájlt érdemes szintén a képernyőn megjeleníteni (forgatni, méretezni) például a DWG TrueView (ingyenesen letölthető [11]) program segítségével.

Jó néhány igen látványos geometriájú 3d-s kaotikus attraktor modelljének leírása található például a [12] honlapon. A letölthető MAPLE programunkkal ezen attraktorok DXF fájljai könnyen legenerálhatók és megjeleníthetők. Példaként a 3. ábrán a híres Lorenz-attraktor vektorgrafikus

képét mutatjuk be. Az attraktor általunk generált (*attractor\_3dgrav\_lorenz\_100-150\_5000.dxf*) DXF fájlját DWG TrueView program képernyőjén jelenítettük meg. (Megjegyzés: a [7] weblapunkon két általunk generált 3D-s kaotikus attraktor animációja is látható.)



3. ábra: a Lorenz attraktor (a fraktáldimenzió 2.063) 3D-s vektorgrafikus megjelenítése a DWG-TrueView programban

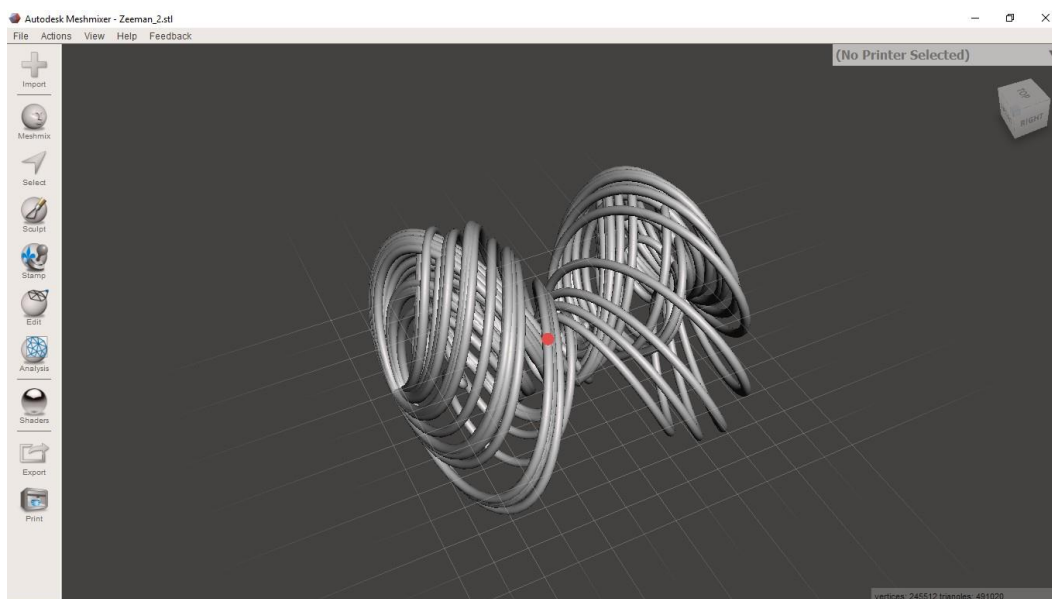
## 2.2. 3-dimenziós nyomtatás

Egy másik valós, térbeli megjelenítési lehetőség a *3D-s nyomtatás*. A háromdimenziós nyomtatás additív gyártási folyamatként és prototípus-készítésként is ismert. Arról van szó, amikor valós tárgy készül egy háromdimenziós tervből. A digitális háromdimenziós modell STL fájlformátumban kerül elmentésre és jut el a nyomtatóhoz, a háromdimenziós nyomtató ezután rétegenként formálja meg a valódi tárgyat. Többféle technológia alkalmas háromdimenziós nyomtatásra. A legfontosabb eltérések abban rejlenek, hogy a rétegek hogyan épülnek egymásra a modell készítésekor. Nyomtatáskor a gép beolvassa a modell adatait és sorban egymásra illeszkedő rétegeket képez folyadékból, porból vagy sík lemezekből, ilyenformán fokozatosan felépíti a modellt a metszetekből. Ezeket a rétegeket, melyek alakra és vastagságra megegyeznek a virtuális modell metszeteivel, egymáshoz köti, vagy automatikusan egymáshoz tapadnak. Ennek a módszernek legnagyobb előnye, hogy majdnem minden formát vagy geometriai testet elő tud állítani.

De vajon kaotikus attraktorok 3-dimenziós megjelenítésére is használható-e ez a technológia? A probléma az, hogy a kaotikus attraktor gyökeresen különbözik a mérnöki gyakorlatban előforduló modellektől: nem különböző (viszonylag egyszerű) geometriai alakzatok által meghatározott térbeli szerkezet, hanem egy differenciálegyenlet-rendszer numerikus megoldása során időlépésenként nyert fázispont-sorozatból álló pontfelhőt kellene megjeleníteni. Ez a nyomtatási technológia fentebb leírt elve alapján nyilvánvalóan kivitelezhetetlen a 3D-nyomtató számára. A feladatunk tehát az, hogy a pontsorozatot a nyomtató számára értelmezhető felületté alakítsuk. Néhány sikertelen próbálkozás után az alábbi megoldásunk vált be: első lépésben a pontsorozatot folytonos vonallá alakítjuk szakaszonkénti spline görbeillesztéssel, majd második lépésben a kapott görbét (lényegében az attraktorba „simuló” trajektória közelítő „nyomvonalát”) egy (választható átmérőjű) hengerrel vesszük körbe, így végül egy vékony csőfelületet nyerünk, amely már szabványos STL fájlba menthető és a nyomtató által megjeleníthető. Ezt a programot is MAPLE-ben készítettük el és szintén letölthető a [7] honlapunkról az alább ismertetett példákkal. Ebben az esetben szintén az előző szakaszban említett tetszőleges modellre könnyen adaptálható formában készítettük el a programot: első szekció futtatásával tanulmányozhatjuk, módosíthatjuk a modellünket az attraktor 3-dimenziós megjelenítésével a MAPLE programon belül (ez esetben nagyon fontos paraméter a

cső átmérője is), a második szekció futtatásával a már véglegesített attraktor képét írhatjuk ki STL fájlba. A kapott STL fájlt nyomtatás előtt ellenőrizhetjük pl. az ingyenesen letölthető MeshMixer program segítségével, amely úgy jeleníti meg számunkra, ahogy a 3D-printer is kezelni fogja (lásd pl. a 4. ábrát). (A futtatáshoz MAPLE 2015 vagy későbbi verzió szükséges!)

A nyomtatás előtt még célszerű a kapott csőfelület két végét körlapokkal lezárni (a nyomtatók hibát jelezhetnek, ha a megjelenítendő felület nem zárt). Ez a művelet a MeshMixer-ben könnyen elvégezhető: a kiválasztott STL fájl importálása után a „csőkigyó” megjelenik a képernyőn (a jobb egérgomb lenyomása közben a kurzor mozgatásával forgatható), a bal oldalon levő ikon oszlopban kattintsunk az *Analysis* pontra, a felugró ablakban válasszuk az *Inspector* funkciót, a megjelenő ablakban kattintsunk az *Auto Repair All* gombra, végül a javított modellt mentjük el a *File/Export* menüponttal (Fájl típusában válasszuk az STL Binary Format lehetőséget).



4. ábra: az általunk „felfedezett” Zeeman attraktor csőfelületi képe, amely már legyártható egy 3D-nyomtatóval

### 3. Példák

Az alábbiakban négy konkrét 3-dimenziós fázisterű dinamikai rendszeren mutatjuk be a fenti megjelenítési metódusainkat. Elsőként a közismert Lorenz modellt mutatjuk be, majd az ún. Duffing-oszcillátort, harmadikként az általunk korábbi munkáink során kidolgozott gerjesztett Zemmann-gép modellünket, végül pedig a Halvorsen modellt. Mindegyik ismertett modellhez tartozó MAPLE fájlok, valamint szemléltető videók is megtalálhatók a [7] weboldalunkról letölthető *e-anyagok.zip* fájl kicsomagolása után kapott mappában. A négy példa attraktorhoz egy-egy alkönyvtárban megtalálhatóak az üvegbe gravírozáshoz szükséges DXF fájlokat generáló *3d\_attractor\_lasergrav*, a 3D-s nyomtatáshoz szükséges STL fájlokat generáló *3d\_attractor\_3d-printer* MAPLE programok, mintaként legyártott DXF és STL grafikus adatfájlok, valamint videók.

#### 3.1. Lorentz modell

A Lorenz modell lényegében egy alulról melegített folyadék rétegben kialakuló áramlás végletekig leegyszerűsített matematikai leírása (a klasszikus Rayleigh-Bénard féle konvekciót volt hivatott a létező legegyszerűbb formában szimulálni), amelyet az atmoszférikus (meteorológiai) jelenségek értelmezéséhez készített Edward Lorenz [13]. (Később kiderült, hogy a kapott matematikai modell izomorf például egy egyszerű mechanikai szerkezet, az ún. Malkus-féle vízkerék modelljével.). A Lorenz-modell dinamikai egyenletrendszer az (F.1) standard formátumban (lásd pl. [1] 5.7. alfejezetében):



$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \sigma \cdot (y - x) \\ \dot{y} &= x \cdot (r - z) - y \\ \dot{z} &= x \cdot y - b \cdot z \end{aligned} \right\},$$

ahol  $\sigma$ ,  $r$ ,  $b$  pozitív paraméterek (például a 3. és 6. ábrákon.  $\sigma = 10$ ,  $r = 27$  és  $b = 2.6667$ ).

### 3.2. Duffing-oszcillátor

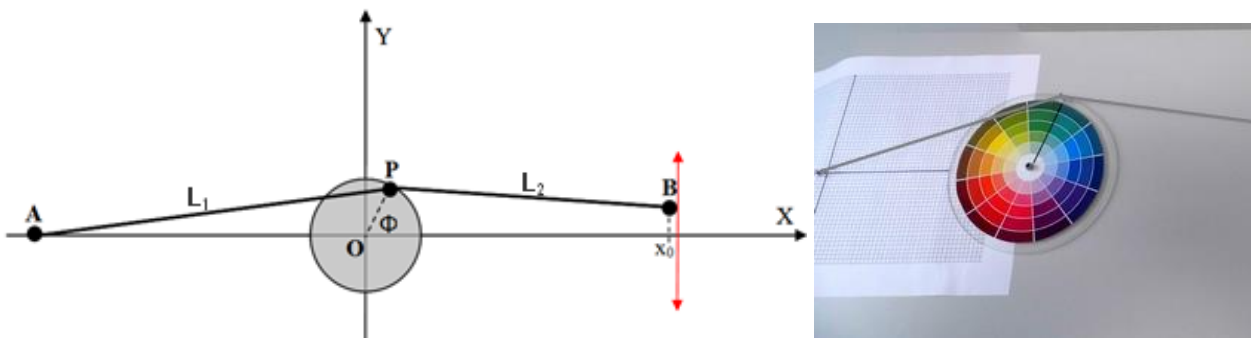
Az ún. Duffing-modell lényegében egy periodikusan gerjesztett súrlódásos anharmonikus oszcillátor [14], a dinamikát megadó differenciálegyenlet-rendszere:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -a \cdot x - b \cdot x^3 - c \cdot v + \cos(z) \\ \dot{z} &= \frac{2\pi}{T} \end{aligned} \right\},$$

ahol  $x$ ,  $y$  and  $z$  rendre a kitérés, a sebesség és a gerjesztés fázisát megadó változók (a periódusidő  $T$ ).

### 3.3. Gerjesztett Zeeman-féle katasztrófagép

Az eredeti szerkezetet C. Zeeman konstruálta a katasztrófa jelenség illusztrálására és tanulmányozására. A szerkezet roppant egyszerű, bárki könnyen megépítheti (5. ábra). Merev síklaphoz rögzítünk egy  $R$  sugarú korongot az  $O(0;0)$  középpontján átmenő tengely körül forgatható módon. Veszünk két (megnyújtatlan állapotban) azonos  $L_0$  hosszúságú rugalmas szálát, mindkét szál egyik végét a korong egy  $P$  kerületi pontjához rögzítjük. Ezek után az egyik szál másik végét enyhén megfeszítve a merev síklap valamely  $A(-a \cdot R; 0)$  pontjához rögzítjük, míg a másik szál még rögzítetlen  $B$  vége szabadon mozgatható a síklapon. A katasztrófaelmélet a Zeeman-gép egyensúlyi állapotának kvázisztatikus mozgások során mutatkozó hirtelen, ugrásszerű változásait írja le. Jelen cikk szerzői korábbi munkájuk [5] során a  $B$  végpont periodikus mozgatása által periodikusan gerjesztett súrlódásos Zeeman-gép dinamikáját tanulmányozva nagyon tipikus kaotikus viselkedést tapasztaltak és elsőként mutatták be az általuk „felfedezett” Zeeman-attraktor geometriáját.



5. ábra: a gerjesztett Zeeman-gép vázlatja és egy saját megvalósításunk

A gerjesztett Zeeman-gép dinamikáját megadó differenciálegyenlet-rendszer [5]:

$$\begin{cases} \frac{d\Phi}{dt} = f_1(\Phi, \omega, \Theta) = \omega \\ \frac{d\omega}{dt} = f_2(\Phi, \omega, \Theta) = \\ = c \cdot \left[ \frac{(l_1 - l_0)}{l_1} \cdot a \cdot \sin \Phi + \frac{(l_2(\Theta) - l_0)}{l_2(\Theta)} \cdot (y(\Theta) \cdot \cos \Phi - x(\Theta) \cdot \sin \Phi) \right] - \omega \\ \frac{d\Theta}{dt} = f_3(\Phi, \omega, \Theta) = \frac{2\pi}{T_p} \end{cases}$$

$$\text{where: } \begin{cases} l_1 = \sqrt{(\cos \Phi + a)^2 + (\sin \Phi)^2} \\ l_2(\Theta) = \sqrt{(x(\Theta) - \cos \Phi)^2 + (y(\Theta) - \sin \Phi)^2} \end{cases} \text{ and } c = \frac{I \cdot R^2 \cdot k}{\gamma^2}$$

ahol  $I$  az  $R$  sugarú korong tehetetlenségi nyomatéka,  $L_0$  a rugalmas szálak megnyújtatlan hossza ( $L_0=l_0 \cdot R$ ,  $L_1=l_1 \cdot R$ ,  $L_2=l_2 \cdot R$ ),  $k$  a szálak rugalmassági együtthatója és  $\gamma$  a súrlódási tényező.

### 3.4. Halvorsen modell

Utolsó példánk az ún. Halvorsen-modell kaotikus attraktora [15]. A dinamikai egyenletrendszer:

$$\begin{cases} \dot{x} = -a \cdot x - 4y - 4z - y^2 \\ \dot{y} = -a \cdot y - 4z - 4x - z^2 \\ \dot{z} = -a \cdot z - 4x - 4y - x^2 \end{cases}$$

ahol  $a$  egy pozitív paraméter (a 6. ábrán látható esetben  $a=1.4$ ).

A 6. ábrán három kaotikus attraktort (a szerzők, illetve diákok által készített) üvegcobkába gravírozott megjelenítését mutatjuk be: a nevezetes Lorenz-modell „pillangó” attraktorát, a gerjesztett Zeeman-gépünk „spulni” attraktorát és a Halvorsen attraktort. A [16] linken és [7] weboldalunkon a Zeeman attraktor üvegcobkába gravírozott 3-dimenziós képéről tekinthető meg videó.



6. ábra: A Lorenz attraktor, a Zeemann attraktor és a Halvorsen attraktor üvegcobkába gravírozott 3-dimenziós képe

## 4. Projekt-munka

A 3-dimenziós kaotikus attraktorok előzőekben bemutatott valós tárgyi megjelenítési módszere kiválóan alkalmas diákok számára projekt-munka feladatnak. A kecskeméti Neumann János Egyetemen a Modern fizika szemlélete c. szabadon választható kurzus hallgatói néhány hét káoszelméleti bevezetést is kapnak, amelybe opcióként beillesztettük az alább ismertetésre kerülő projekt munkát.

A projekt munka rövid leírása:

(1) Válasszunk egy 3-dimenziós fázisterű kaotikus rendszert: egy valós fizikai rendszert, vagy egy tetszetős attraktorú modellt például a [12] weboldalról.

(2) Adaptáljuk a rendelkezésre álló MAPLE programokat a kiválasztott modellünkre. (Ez igen egyszerűen és gyorsan megtehető a megjelölt néhány sorban eszközölt átírásokkal. A beírásokat kommentekkel tettük még egyértelműbökké.).

(3) A következő szakasz a munka érdemi számítógépes „kísérleti fizikai” része: a modellünkre adaptált MAPLE program első szekcióját (a kurzort a szekcióba helyezve, a felső menü ikonsorban a ! ikonra kattintva) futtatva a paraméterek változtatásával keressünk nekünk tetsző attraktor képet (a MAPLE megjeleníti az attraktor 3-dimenziós képének forgatható, méretezhető projekcióját). A modell saját belső paramétereivel a kaotikus tartomány „belövése” történik (ez nem mindig könnyű, támaszkodjunk irodalmi értékekre, vagy használhatjuk a Függelék végén említett bifurkációs diagramot, amely mintegy feltérképezi számunkra a különböző viselkedési tartományokat). A kaotikus attraktor megtalálása után a 3-dimenziós fázistérbeli ábrázolás paramétereit (a  $t_1$  és  $t_2$  időértékekkel kijelölt megjelenítési időtartományt, a felbontást megadó  $imax$  megjelenítendő pontszámot, valamint 3D-s nyomtatáshoz még igen fontos *tuberad* paraméter, amely az attraktor nyomvonalát körülvevő cső sugara. (Természetesen a diákok ennél részletesebb útmutatót kapnak.) A munka ezen szakasza akár több órát is igénybe vehet, ha igazán szép 3D-s megjelenítést akarunk elérni.

(4) Ha végül elégedettek vagyunk a (3) szakaszban kapott attraktor 3-dimenziós képével a MAPLE program második szekciójának futtatásával generáljuk le a kívánt (üvegbe gravírozás esetén DXF, 3D-s nyomtatás esetén pedig STL) formátumú grafikus fájlt (a második szekcióban csupán a fájlnevet kell kívánságunk szerint átírni).

(5) A kapott kaotikus attraktor fizikai feldolgozása (gravírozása, vagy nyomtatása) előtt érdemes megtekintenünk a grafikus fájlban tárolt 3-dimenziós képet: üvegbe gravírozás esetén a DXF fájlt pl. az ingyenes DWG TrueView programmal, illetve 3D-s nyomtatás esetén a szintén ingyenes MeshMixer programmal.

(6) Végül, ha minden rendben, akkor megtörténhet az attraktorunk valós, kézzelfogható tárgyba való fizikai megjelenítése. (Mivel e cikk szerzőinek sem állt rendelkezésre sem üveg lézergravírozó berendezés, sem 3D-s nyomtató, így internetes megrendeléssel gyártattuk le az attraktorainkat darabonként 10-20 ezer forintos áron.)

Tapasztalataink szerint a diákok nagy érdeklődéssel és lelkesen dolgoztak a projekten, még akkor is, ha végül nem szántak pénzt a fizikai megvalósításra. Mindazonáltal készült néhány nagyon szép ajándéktárgynak is kiválóan alkalmas darab (lásd pl. 6. ábrán).

Végezetül álljon itt néhány diák véleménye a projektről:

„Bárcsak minden fizikaóra ilyen lenne!”

„Nagyon élveztem ezt a munkát. Életemben először tapasztalhattam meg a kutatás és alkotás örömét.”

„Én mindig szerettem a fizikát, de soha nem hittem volna, hogy valaha is fizikaórán fogok a barátnőmnek egy kivételesen érdekes és szép, egyedi ajándékot készíteni. Nagy sikerem volt velem, köszönöm!”

És végül a legegyszerűbb komment: “☺”.



## Függelék: káoszelméleti összefoglaló

A káosz determinisztikus rendszerekben megjelenő speciális mozgás (időfejlődés), amely

- *irreguláris* (nem periodikus, vagy kváziperiodikus),
- *extrém érzékeny a kezdeti feltételekre*, így előrejelezhetetlen és hosszú távra csak valószínűségi leírás adható.,
- határozott struktúrájú a fázistérben: *fraktál* szerkezetű (lásd alább).

*Fázistér*: valamely dinamikai rendszer egy időpillanatbeli állapotának egyértelmű megadásához szükséges (minimális számú)  $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  változók által kifeszített  $n$  dimenziós absztrakt tér.

*Trajektória*: a rendszer pillanatnyi állapotát megadó fázistérbeli pont a rendszer időbeli változását követve elmozdul, és egy utat jár be. Ezt az utat trajektóriának nevezik.

*Dinamika* (időfejlődés): a változóinak  $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$  elsőrendű differenciálegyenlet rendszerével (például sebességváltozók bevezetésével) adjuk meg:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (\text{F.1})$$

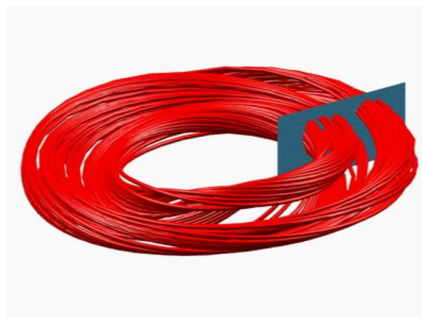
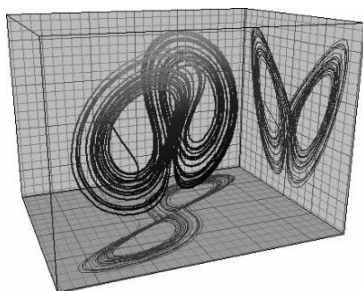
*Káosz feltétele*: folytonos időváltozás esetén legalább háromdimenziós fázistérű nemlineáris mozgásegyenletű rendszer.

*Attraktor*: a fázistér vonzó halmaza, amely felé a trajektóriák közelednek:

- *egyszerű attraktor*: szabályos mozgásokhoz tartozó attraktorok, fixpont attraktor, vagy határciklus attraktor,
- *különös (kaotikus) attraktor*: szabálytalan (kaotikus) mozgást végző rendszer fraktál típusú attraktora.

*Permanens káosz* esetén a rendszer fázispontja soha nem hagyja el az attraktort, míg *tranzien káosznál* a trajektória csak véges ideig marad a kaotikus attraktor közelében.

*Fraktál*: végtelenül komplex geometriai alakzatok, amelyek egzakt, vagy közelítő (statisztikus) módon önhasonlóak több nagyságrendi skálán (mérettartományon) keresztül. és valamely jellemzőjüket a skála (méret) függvényében log-log léptékben ábrázolva egyenest kapunk, amely meredeksége a (jellemzően törtszám értékű) fraktáldimenzió.



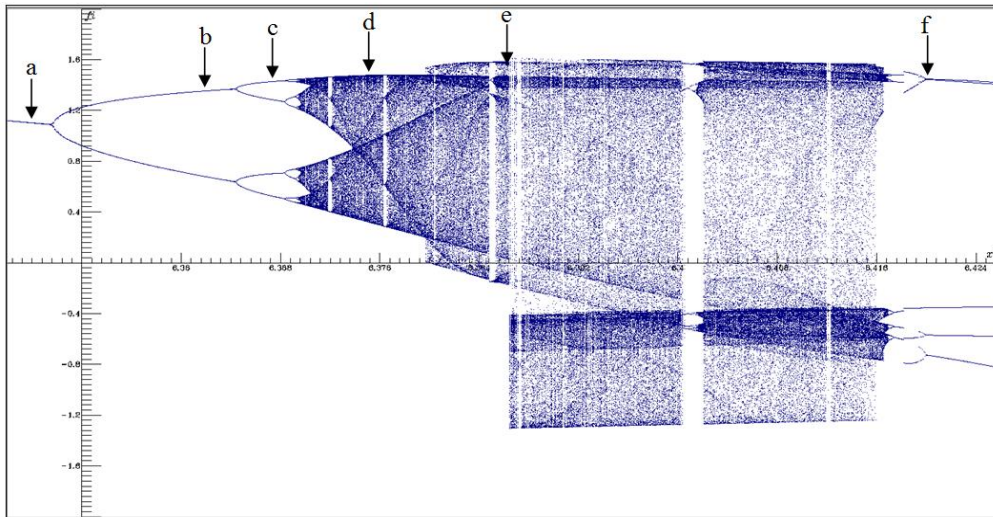
7. ábra: attraktor projekciói, illetve Poincaré-metszete.

*Megjelenítés*: az absztrakt sokdimenziós fázistérbeli attraktor megjelenítésére két dimenzióban (pl. számítógép képernyőjén) két alapvető lehetőség van (7. ábra):

- *projekció*: vetítés egy fázissíkra, vagy tetszőleges altérre, azaz kétdimenziós vetület megjelenítése, vetítés során információt veszítünk (pl. a trajektória a vetületen metszi önmagát),

- *Poincaré térkép (-leképezés)*: a trajektóriának csak egy kiválasztott felületet átdőfő (egy adott altérbe eső) metszéspontjait ábrázoljuk, melyek diszkrét pontsorozatot alkotnak. A gerjesztett rendszerek esetén használt ún. *stroboszkópikus leképezés* egy speciális Poincaré-leképezés, amely a trajektória gerjesztési periódusidőnként (azaz állandó fázisértékeknél) vett mintájaként kapott pontsorozat.

*Bifurkációs diagram*: a rendszer valamely fázisváltozójának hosszú távon megjelenő Poincaré-leképezéssel kapott aszimptotikus értékeit ábrázolja a kontrolparaméter függvényében. (8. ábra). Ez igen hasznos eszköz a kaotikus tartományok feltérképezésében.



8. ábra: a gerjesztett Zeeman-gép bifurkációs diagramja (lásd alább és [5]-ben).

## Köszönetnyilvánítás

A tanulmány elkészítését a Magyar Tudományos Akadémia Tantárgy-pedagógiai Kutatási Programja támogatta.

Köszönettel tartozunk a kutatás támogatásáért, amely az EFOP-3.6.1-16-2016-00006 „A kutatási potenciál fejlesztése és bővítése a Neumann János Egyetemen” pályázat keretében valósult meg. A projekt a Magyar Állam és az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával, a Széchenyi 2020 program keretében valósul meg.

## Irodalomjegyzék

- [1] Tél, T. and Gruiz, M. (2006). *Chaotic Dynamics, An Introduction Based on Classical Mechanics*, Cambridge University Press
- [2] Korsch, H. J. and Jodl, H.-J. (1998). *Chaos — A Program Collection for the PC*. Berlin: Springer
- [3] Gutzwiller, M. C. (1990). *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*. Berlin: Springer
- [4] Szemplinska-Stupnicka, W. (2003). *Chaos, Bifurcations and Fractals Around Us*. Singapore: World Scientific
- [5] Nagy, P. and Tasnádi, P. (2014). Zeeman catastrophe machines as a toolkit for teaching chaos, *European Journal of Physics* 35: Paper 015018. 22 p.
- [6] Nagy, P. and Tasnádi, P. (2016). Irregular chaos in a bowl. *Key Competences in Physics Teaching and Learning: proceedings of International Conference GIREP EPEC 2015*. pp. 262-269.
- [7] Webpage of Kaotikus attraktorok 3D-s megjelenítése: [http://csodafizika.hu/3d\\_attraktorok](http://csodafizika.hu/3d_attraktorok)
- [8] Sub-surface laser engraving. [http://en.wikipedia.org/wiki/Laser\\_engraving#Sub-surface\\_laser\\_engraving](http://en.wikipedia.org/wiki/Laser_engraving#Sub-surface_laser_engraving)
- [9] Grossman, Bathsheba. *Laser Crystals*. <http://www.bathsheba.com/crystal>
- [10] AutoCAD DXF file format. <http://www.fileformat.info/format/dxf/egff.htm>
- [11] DWG TrueView Autodesk, <https://www.autodesk.com/products/dwg/viewers>
- [12] Strange Attractors. <http://chaoticatmospheres.deviantart.com/gallery/44050549/Strange-Attractors>
- [13] Lorenz, E., N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*. **20** (2): 130–141.
- [14] Duffing oscillator, [http://www.scholarpedia.org/article/Duffing\\_oscillator](http://www.scholarpedia.org/article/Duffing_oscillator)
- [15] Sprott JC (2010) *Elegant chaos: algebraically simple chaotic flows*. World Scientific, Singapore, pp. 84.
- [16] 3D chaotic (Zeeman-) attractor in glass (video). [http://indavideo.hu/video/3D\\_kaotikus\\_attraktor\\_uvegbe\\_gravirozva](http://indavideo.hu/video/3D_kaotikus_attraktor_uvegbe_gravirozva)