Gradus Vol 5, No 1 (2018) 128-133
ISSN 2064-8014

VALÓSZÍNŰSÉG MAXIMALIZÁLÁS

PROBABILITY MAXIMIZATION

Csizmás Edit [1], Drenyovszki Rajmund [1], Vajnai Tibor [1], Kovács Lóránt [1], Fábián Csaba [1]*

[1] Informatika Tanszék, GAMF Műszaki és Informatikai Kar, Neumann János Egyetem, Magyarország

Kulcsszavak:
sztochasztikus programozás
valószínűségi korlátok

Keywords:
stochastic programming
probabilistic constraints

Cikktörténet:
Beérkezett 2017. november 4.
Átdolgozva 2017. november 14.
Elfogadva 2017. november 18.

Összefoglalás
Valószínűség maximalizálási problémákat oldunk meg belső közelítéssel. A megoldás módszere analóg a p-efficiens pontok klasszikus módszerével, azonban a valószínűségi függvény szinthalmazai közelítése helyett az epigráfot közelítjük. Jelen dolgozatban a megoldott tesztfeladat Matlab implementációját és az előzetes tesztelés eredményeit mutatjuk be.

Abstract
We solve probability maximization problem by inner approximation. The method of the solution is analogous to the classical method of the p-efficient points, but we approximate the epigraph instead of the level sets of probabilistic function. In this issue we present Matlab implementation details and the results of preliminary testing.

1. Bevezetés

Az infokommunikációs technológiák fejlődése, például a smart grid és a közlekedési rendszerek területén, szükségessé teszik olyan módszerek kidolgozását, amelyekkel valószínűségi korlátokat tudunk kezelni.

Kétféle problémával foglalkozunk. Egyrészt valószínűség maximalizálással a következő alakban:

$$\max \mathrm{P}(Tx \geq \xi)$$
$Ax \leq b$ korlátozó feltétel mellett.

Másrészt valószínűségi korlát kezelése az alábbi formában:

$$\min c^T x$$
$\mathrm{P}(Tx \geq \xi) \geq p$ és $Ax \leq b$ korlátozó feltételek mellett.

A fenti feladatokban x a döntési változókat tartalmazó vektor, A és T mátrixok, b és c megfelelő méretű vektorok. A p valószínűség adott $(0 < p < 1)$ és a ξ véletlen vektor eloszlása ismert. Feltételezzük, hogy az $F(z) = \mathrm{P}(z \geq \xi)$ együttes eloszlásfüggvény logkonkáv, ezért a $\Phi(z) = -\log F(z)$ konvex. A továbbiakban ezzel dolgozunk.

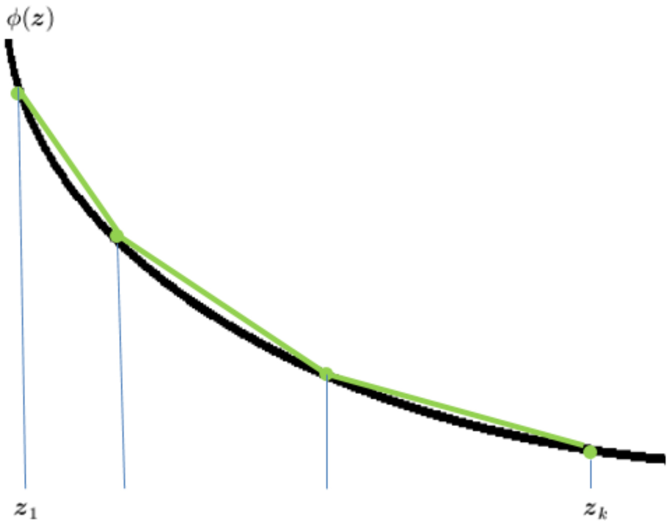
A véletlen eljárás során alkalmazott módszerek a [3,2] cikkekben részletesen kifejtésre kerültek. Jelen dolgozatban a módszer teszteléséhez használt implementációt és a tesztfeladatokon kapott eredményeket mutatjuk be.

* Kapcsolattartó szerző. Tel.: +36 76 516 412
E-mail cím: csizmas.edit@gamf.uni-neumann.hu

2. Az alkalmazott módszer szemléltetése

A feladat megoldása két részből áll. A mester feladat egy lineáris programozási feladat, a javító oszlopok keresése pedig korlátozás nélküli konvex minimalizálási feladat. Az eljárás iteratív, mindig olyan újabb próbapontot keresünk, amelynek a felvételével leginkább javul a célfüggvény értéke. Az alkalmazott eljárás a Prékopa-féle duális megközelítés [7] egy módosított változata, amelyben a függvény epigráfját közelítjük, nem pedig a szinthalmazt. A korlátozás nélküli minimalizálást gradiens módszerrel oldjuk meg [3]-ban, a véletlenített eljárásban, [2]-ben a gradiensnek egy véletlen közelítését használjuk.

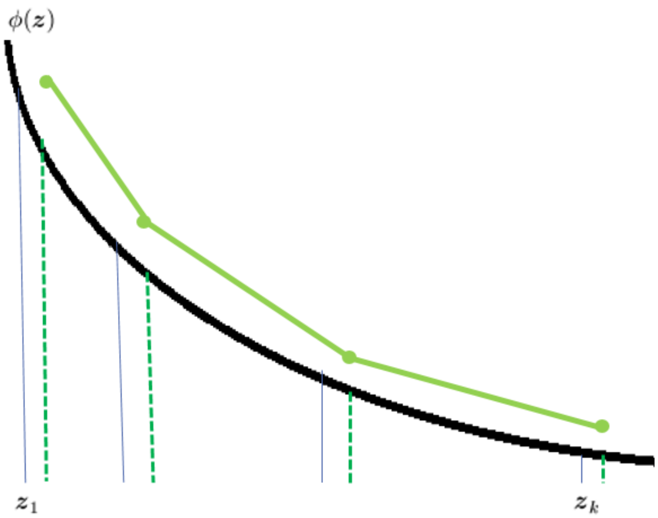
A [3]-ban belső közelítést alkalmaztunk a valószínűségi függvényre, amit az 1. ábra



1. ábra. A valószínűségi függvény belső közelítése

szemléltet. Ez a módszer pontos, de nagyon munkaigényes.

A [2]-es cikkben a [3]-ban alkalmazott belső közelítés egy véletlen változata van kidolgozva. A módszer azért jó, mert ha pontatlanul számoljuk ki a gradienseket, akkor is felső becslést adunk a függvényre. A próbapontok nem pontosan vannak megállapítva, de ezekben az elcsúsztatott pontokban a függvényértékeket elég pontosan számítjuk ki (2. ábra).



2. ábra. A valószínűségi függvény véletlen módszerrel kapott közelítése

3. Az implementáció

A megoldás implementálására Matlabot használtunk az IBM ILOG CPLEX (12.6.3. verzió) optimalizálási eszköztárral.

3.1. A mester (master) feladat

A feladat megoldása során standard normális eloszlást feltételezünk. Legyen r a véletlen vektor komponenseinek száma, ez egyenlő a T mátrix sorainak számával.

Először keresünk egy megfelelő $z_0 \in \mathbb{R}^r$ vektort, amelyik a primal feladat egy lehetséges megoldása. Ez a következő feladat megoldásával történik:

$$\begin{aligned} &\max\ t \\ &1t - Tx \leq 0 \\ &Ax \leq b, \end{aligned} \tag{1}$$

ahol $t \in \mathbb{R}$ és $1 \in \mathbb{R}^r$ csupa egyesekből álló vektor. Ha (1) nem megoldható feladat, akkor az eredeti feladatnak sincs megoldása. Másrészt, ha a célérték nincs korlátozva, akkor az eredeti feladatban 1 valószínűség érhető el.
Legyen $z_0 = 1t^*$, ahol t^* az (1) feladatnak egy optimális megoldása.
Legyen $Z \subset \mathbb{R}^r$ egy olyan kocka, amelyen kívüli valószínűségi súly elhanyagolható. Mivel standard normál eloszlással dolgozunk, az r dimenziós Z kockát az origóra szimmetrikusnak tekintjük. Kísérleteinkben olyan kockával dolgoztunk, amelyre $\mathrm{P}(Z) \approx 0{,}99$.
Legyen $z^{max} = (z_1^{max}, \dots, z_r^{max})$ a Z kocka maximális csúcsa. A megoldás megkönnyítése érdekében a z_0 mellett a $z_l(l = 1, .., r)$, z_{r+1}, z_{r+2} vektorok hozzáadásával inicializáljuk a primál feladatot, ahol $z_l = (z_1^{max}, \dots, z_{l-1}^{max}, 0, z_{l+1}^{max}, \dots, z_r^{max})$ a Z kocka z^{max} csúcsából induló élek felezőpontjai és $z_{r+1} = 0, z_{r+2} = z^{max}$. A 2. ábrán ezek a próbapontok láthatók.
A mester feladatot a CPLEX simplex megoldójával oldottuk meg, 10^{-4} tolerancia alkalmazásával.

3.2. A valószínűségi függvény adatainak meghatározására szolgáló kútfő (az oracle)

A kútfő minden iterációban közelítő megoldást keres a $\max_z\{\bar{u}^T z - \Phi(z)\}$ problémára. Átfogalmazva minimalizáljuk a $\Phi(z) - \bar{u}^T z$ függvényt, ahol $\bar{u}$ a mester feladat optimális duális változója. A z vektort a mester feladat egy lehetséges oszlopaként képzelhetjük el. Az optimális z az az oszlopvektor, amelyhez legjobb redukált ár tartozik a szimplex módszer szabályai szerint. A próbapontokat gradiens módszerrel kerestük, a [6] 8.1 fejezetében kifejtett aranymetszést alkalmazva az iránymenti keresésre.

Minden iterációban számolni kell az $F(z)$ többdimenziós normál eloszlásfüggvény függvényértékét és gradiensvektorát. Ehhez a számításhoz a [8] Prékopa-könyv 6.6.4. szakaszában található képleteket használjuk. Ezeknek a képleteknek a segítségével a többdimenziós eloszlásfüggvény gradiensének kiszámítása leegyszerűsödik a feltételes eloszlásfüggvény-értékek kiszámítására. A normális eloszlások esetén a feltételes eloszlások is normálisak.

A többváltozós normál eloszlásértékek numerikus számítását Genz által [4] szerint implementált QSIMVNV Matlab függvény segítségével végeztük.

4. Számítások

4.1. A tesztfeladat

A véletlenített módszer teszteléséhez a [3]-ban ismertetett feladatok közül a „cash matching" feladatot használtuk fel. A feladatban, mely normális valószínűségi eloszlású 15 dimenziós feladat, bizonyos pénzeszközöket kell befektetni egy nyugdíjalap nevében úgy, hogy bizonyos kifizetéseket az elkövetkező 15 évben kell elvégezni. A részletes ismertetés [1,5]-ben található.

A tesztfeladatot eredetileg költségbecsléssel alakítottuk ki, valószínűségi korlát mellett. A feladatot a valószínűség maximalizálására fordítottuk át. A költségkorlátok jobb oldalát úgy állítottuk be, hogy a megfelelő optimális valószínűségi szint $p = 0{,}99$ legyen. Ezekre a számításokra Szántai számítógépes kódját használtuk [9].

Az előzetes tesztekben a futási időket vizsgáltuk különböző pontosságú becslések esetén. A Genz-féle kódban a gradiens kiszámítása szimulációs eljárással történik, a mintaszám befolyásolja a pontosságot. Különböző (250, 500, 1000 és 2000) mintaszámokkal végeztünk futtatásokat (10-et minden mintaszám esetén) és ezeket átlagoltuk. Az iterációk száma minden esetben 50 volt. Azt vizsgáltuk, hogy milyen összefüggés van a mintaszám és a futási idő között, illetve, hogy a mintaszám mennyiben befolyásolja azt, hogy a megoldás milyen gyorsan konvergál az optimumhoz. Azért, hogy az optimumhoz való konvergálást összehasonlíthassuk, képeztük az egyes mintaszámok esetén a 10 futtatáskor kapott valószínűségek átlagait, majd ezen átlagok és az elvárt p valószínűségi szint RMSE (root mean squared error) értékeit számítottuk ki a következő képlet alapján:

$$RMSE_m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(p_{i,m}-p)^2}{n}}, \qquad (2)$$

ahol m a mintaszám, n az iterációk száma, $p_{i,m}$ az m mintaszám esetén, az i-edik iteráció során kapott valószínűségek átlaga.

4.2. Futási eredmények

A 3. ábrán jól látható, hogy a kisebb mintaszámok esetén a valószínűség lassabban konvergál az optimumhoz, s hogy a különböző futási eredmények között is nagyobb a különbség. A nagyobb mintaszám esetén az optimumhoz való konvergencia sokkal gyorsabb.

Az RMSE (2) alapján kiszámított értékeit az 1. táblázat tartalmazza. Az értékek jól láthatóan mutatják, hogy a mintaszám növekedésével csökken a hiba, tehát egyre pontosabb eredményeket kapunk.

1. Táblázat. A számított RMSE értékek

Mintaszám	250	500	1000	2000
RMSE	0,0064	0,0060	0,0057	0,0056

A 10 futtatás futási időinek átlagait az 1. táblázat tartalmazza. A táblázatban jól látszik, hogy a nagyobb mintaszámok esetén a futási idő megnövekszik.

2. Táblázat. Az átlagos futási idők

Mintaszám	250	500	1000	2000
Futási idő (s)	170,95	193,37	252,42	398,82

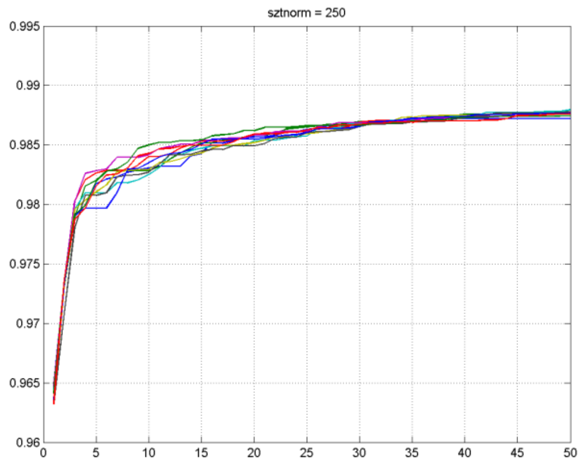
4.3. Eredmények értékelése

Az eredmények alapján elmondható, hogy a pontosabb eredmény kiszámítása nagyobb futási időt eredményez. Az még további vizsgálatot igényel, hogy milyen mintaszámmal érdemes a Genz kódot meghívni, illetve, hogy hány iteráció után érdemes megállni, vagyis mi legyen a megállás feltétele, mivel a tesztelés során konstans iteráció számmal dolgoztunk.

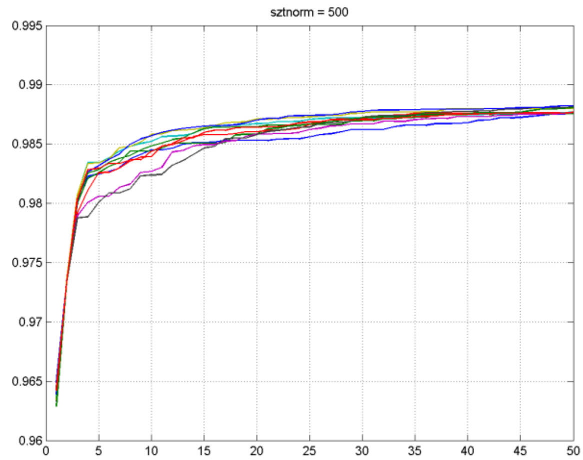
5. Összefoglalás

A [3] cikkben a valószínűségi korlátos feladatot belső közelítéssel oldottuk meg. Ez pontos megoldást eredményezett, de nagy futási idővel. Jelen dolgozatban a [2]-ben kidolgozott véletlenített eljárás implementációját és tesztelését mutattuk be. Ebben a módszerben a gradiens számítása nem annyira pontos, mint a belső közelítéssel való megoldás, viszont a függvényértékeket megfelelő pontossággal számítjuk ki, az epigráfot így is felülről közelítjük. Ez a fajta megközelítés kisebb számítási erőforrást igényel, mivel a gradiensnek közelítő számítása is elegendő.

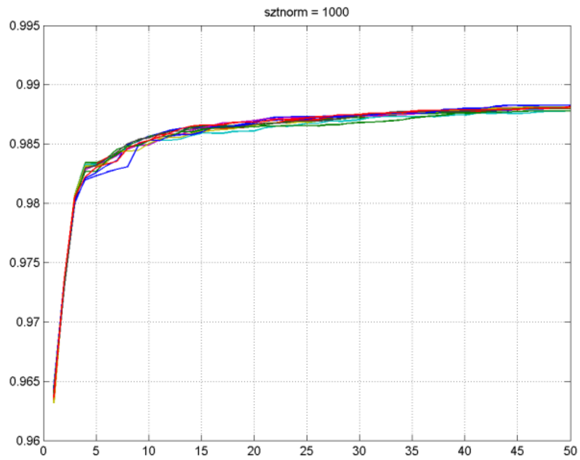
a) mintaszám 250



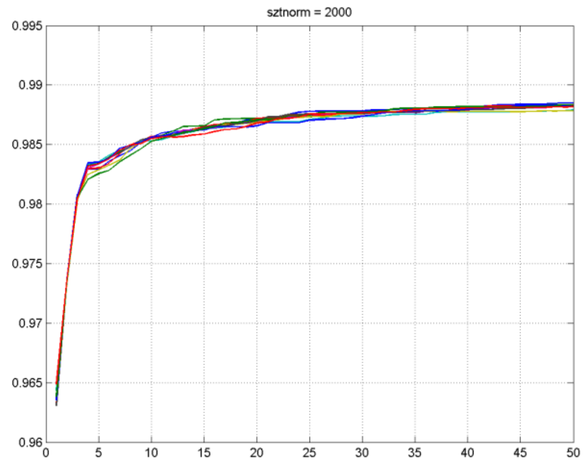
b) mintaszám 500



c) mintaszám 1000



d) mintaszám 2000



3. ábra. Az iterációk során kapott valószínűségek különböző mintaszámok esetén (vízszintes tengely: iterációk száma; függőleges tengely: a kapott valószínűség)

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozunk a kutatás támogatásáért, amely az **EFOP-3.6.1-16-2016-00006 „A kutatási potenciál fejlesztése és bővítése a Neumann János Egyetemen”** pályázat keretében valósult meg. A projekt a Magyar Állam és az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával, a Széchenyi 2020 program keretében valósul meg.

Irodalomjegyzék

[1] D. Dentcheva, B. Lai, and A. Ruszczyński, “Dual methods for probabilistic optimization problems,” *Mathematical Methods of Operations Research*, vol. 60, no. 2, pp. 331–346, 2004.
[2] C. I. Fábián and T. Szántai, “A randomized method for smooth convex minimization, motivated by probability maximization,” 2017. [Online]. Available: http://www.optimization-online.org/DB_FILE/2017/03/5920.pdf. [Megtekintés: 12-Nov-2017].
[3] C. I. Fábián, E. Csizmás, R. Drenyovszki, W. van Ackooij, T. Vajnai, L. Kovács, and T. Szántai, “Probability maximization by inner approximation,” *Acta Polytechnica Hungarica*, vol. 15, no. 1, pp. 105-125, 2018.
[4] A. Genz, “Numerical computation of multivariate normal probabilities,” *Journal of Computational and Graphical Statistics*, vol. 1, no. 2, pp. 141–150, 1992.
[5] R. Henrion, “Introduction to chance constraint programming,” *Technical report, Weierstrass-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik*, 2004. [Online]. Available: www.wias-berlin.de/people/henrion/ccp.ps. [Megtekintés: 12-Nov-2017].
[6] D. G. Luenberger and Y. Ye, *Linear and Nonlinear Programming*. International Series in Operations Research and Management Science, Springer, 2008.
[7] A. Prékopa, “Dual method for the solution of a one-stage stochastic programming problem with random RHS obeying a discrete probability distribution,” *Zeitschrift für Operations Research*, vol. 34, no. 6, pp. 441-461, 1990.
[8] A. Prékopa, *Stochastic Programming*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.
[9] T. Szántai, “A computer code for solution of probabilistic-constrained stochastic programming problems,” in *Numerical Techniques for Stochastic Optimization*, Y. M. Ermoliev and R. J.-B. Wets, Eds. Berlin, Springer-Verlag, 1988, pp. 229–235.