Gradus Vol 4, No 2 (2017) 386-394
ISSN 2064-8014

TÖMEGHATÁS MODELLEZÉSE

SIMULATION OF CROWD EFFECT

Nagy Péter [1*], *Tasnádi Péter* [2]

[1] GAMF Műszaki és Informatikai Kar, Neumann János Egyetem, Kecskemét
[2] Természettudományi Kar, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest

Kulcsszavak:
komplex rendszerek
statisztikus leírás
számítógépes szimuláció
tömeghatás
szociálpszichológia

Keywords:
complex systems
statistical description
numerical simulation
crowd effect
social psychology

Cikktörténet:
Beérkezett: 2017. szeptember 25
Átdolgozva: 2017. október 2.
Elfogadva: 2017. október 29.

Összefoglalás
A fizikában az ún. komplex rendszerek lényegi szerepet töltenek be a kooperatív viselkedésű modellek tanulmányozásában. Jelen munkánkban az elemszám szerepét tárgyaljuk a rendszer statisztikus leírásában és megkíséreljük eredményeink társadalmi jelenségekre vonatkozó értelmezését.

Abstract
Complex systems play an essential role in the investigation of the models with cooperative behavior. Present paper is focused to the role of the number of the elements in the statistical description of systems and a possible interpretation of the results obtained is also proposed for the societal processes.

1. Bevezetés

Ahogyan az anyag részecskékből (atomokból, molekulákból), úgy a társadalom emberekből épül fel. Az anyagban a részecskék közötti kölcsönhatások pontosan leírhatók a fizika megfelelő törvényeivel. Kérdés, hogy a makroszkopikus társadalmi jelenségek eredeztethetők-e az emberek között fennálló viszonyokból, hatásokból.

Jelen tanulmányunkban arra teszünk kísérletet, hogy a statisztikus fizikában használatos modelleket és módszereket társadalmi jelenségekre alkalmazzuk.

A természettudományok és társadalomtudományok interdiszciplináris összehangolása távolról sem újszerű gondolat. Immáron 100 éve jelent meg Méray-Horváth Károly "Társadalomtudomány mint természettudomány" című könyve, melyben a szerző több mint 260 oldalon tárgyalja a különböző összefüggéseket a két tudományág-terület között [1].

A tömeglélektan elsősorban a kollektív tudat-, illetve tömegjelenségekkel foglalkozik. A tömegjelenség az emberi tömegben tanúsított viselkedést jelenti, kollektív tudatjelenségen az egész társadalomban megnyilvánuló tudati jelenségeket értjük. A témának természetesen kiterjedt irodalma van, rövid áttekintésként ajánljuk a [2] weboldalt.

A szociálpszichológia egyik legalapvetőbb kérdése, hogy vajon a tömegben lévő egyének pszichológiája alapjaiban különbözik-e az egyéni pszichológiájuktól, vagy az egyének tömeggé történő csoportosítása új „kollektív psziché” kialakulásához vezet. Tanulmányunkban nem kívánunk állást foglalni e kérdésben, de megmutatjuk, hogy az egyén (elem) tulajdonságaiban nem szükséges változás ahhoz, hogy tömeg (makroszkopikus) szinten minőségileg új viselkedés jelenjék meg, és

* Kapcsolattartó szerző. Tel.: +36 20 4798204
E-mail cím: nagy.peter@gamf.kefo.hu

ezen globális viselkedés jellege függ a tömeg nagyságától. Ezt a minőségi változást méltán nevezhetjük *tömeghatás*nak.

Nem tagadjuk, hogy laikus betolakodók vagyunk a szociálpszichológia területén, amikor tömeglélektani jelenségekre fizikai modelleket próbálunk alkalmazni. Mindazonáltal hisszük, hogy a fizikai szemlélet és matematikai megközelítés hozzájárulhat bizonyos jelenségek jobb megértéséhez és leírásához. Az Olvasók figyelmébe ajánljuk [3] honlapunkat, amelyen a tárgyalásunkhoz kapcsolódó videók megtekinthetők.

2. A modell

A *komplex rendszer* fogalmát eredendően a fizikában vezették be olyan rendszerekre, ahol az alkotóelemek nagy száma és a közöttük lévő kölcsönhatás révén a rendszer globális viselkedése az egyes elemekétől lényegesen eltérő sajátosságokat mutat. Másképpen fogalmazva: az ún. *kooperatív viselkedés* révén az egész több mint részeinek összege.

A komplex rendszerek fogalma azonban napjainkra interdiszciplinárissá vált, a tudomány számos területén megjelennek olyan kölcsönható rendszerekben, ahol az egyes egyedek valamilyen optimális állapot elérésére törekednek, és ennek érdekében hajlamosak az együttműködésre (kooperativitás). Ilyen típusú viselkedés megfigyelhető a gazdaságban, a szociológiában, a biológiában vagy fizikai rendszerekben is, ahol a kölcsönható elemeket (ágenseket) ugyan eltérő módon definiálják, de hasonló korrelatív viselkedésük a háttérben univerzális törvényeket sejtet.

Ezekben a rendszerekben a komplexitás az egyszerre jelenlévő különböző tényezők, úgymint az egyedek (fizikai) kölcsönhatása, a dinamikai viselkedésüket leíró törvényszerűségek (pl. sejtautomata szabályok), valamilyen külső tényező befolyása, esetleg a rendszer speciális geometriai struktúrájából eredő kényszerek eredő hatásaként jelenik meg.

A komplex rendszerek igen széles osztálya írható le az alábbi tulajdonságú ún. *Potts-modellek*kel, amelyekben:

- azonos típusú, véges sok lehetséges állapottal rendelkező elemek vannak,
- az elemek száma jellemzően igen nagy,
- az elemek rendezett, vagy rendezetlen topológiában (többnyire valamilyen rácsstruktúrában) helyezkednek el,
- az elemek között lokális (rövidtávú „szomszéd-szomszéd”) kölcsönhatások vannak,
- létezhetnek a rendszer egészét (azaz minden elemet) érő globális (külső) hatások,
- az elemek szintjén véletlenszerű állapotváltozások (fluktuációk) történnek.

Lássuk mennyiben alkalmazhatók a fenti attribútumok a társadalomra, szűkebb értelemben emberi közösségekre (csoportokra). Az első három pont triviálisan teljesül: a modell elemei ekkor az emberek, akik adott vizsgálati szempont szerint véges sok elemi állapottal kategorizálhatók és valós, vagy virtuális (pl. internet) térben valamilyen kapcsolati struktúrával bírnak.

Mi a helyzet az elemek közötti lokális kölcsönhatással? [3] honlapunkon több videóval szemléltetjük azt a (nyilvánvaló) tényt, hogy az egymás közelében levő emberek kölcsönhatásban állhatnak egymással, és többnyire elmondható, hogy a hatás olyan jellegű, amely azonos állapot felé viszi őket (erre e gondolatra a 3. fejezet végén visszatérünk!). A *Liftben* című videó rejtett kamerás felvételén igen plasztikusan jelenik meg, hogy a kísérleti alany miként igyekszik igazodni a beépített többség viselkedéséhez (jelen esetben, hogy miként kell állni a liftfülkében). Még markánsabban látjuk ugyanezt a *Váróteremben* videón, ahol a beépített emberek a hangszóróból felhangzó hangjelre felállnak, szegény kísérleti alany szinte megalázóan követi le ezt a teljesen abszurd viselkedést. A *Hasalj!* videó szintén beépített emberekkel kiprovokált cselekvést mutat be, viszont a *Ragadós nevetés* és a *Táncoljunk!* felvételeken teljesen valós, spontán szituációkon keresztül szemlélhetjük az emberek közötti lokális kölcsönhatás „vonzó” jellegét. (A ragadós nevetés megjelenik a magyar irodalomban is Karinthy Frigyes zseniális novellájában a „Röhög az Osztály”-ban.)

Tekintsünk ezután példákat nagyszámú embert érő globális hatásokra. A *Világok háborúja rádiójáték 1938 (média)* videón napjaink elsődleges, meghatározó globális hatására a média szerepére tekinthetünk meg egy hírhedt, klasszikus példát: az Orson Welles által rendezett rádiójáték által kiváltott tömeghisztériát. A *Hurrikán* videó a természeti jelenségek globális hatására, míg a *Közlekedési dugó* az urbanisztikus civilizációs jelenségek nagyléptékű hatására mutat be példát. Végül a *Hitler* videón történelmi példát láthatunk a globális hatás kiemelt jelentőségére: a rendszer állapotát döntően határozza meg a globális hatás, mivel a rendszer minden elemére hat. Egy tébolyult kancellár hatása adott emberi közösségre sok nagyságrenddel erősebb és ebből következően tragikusabb és pusztítóbb, mint egy hibbant utcaseprőé. Végül pedig az emberek állapotváltozásaiban a fluktuáció is tetten érhető, hiszen sokszor bármilyen kimutatható hatás nélkül is, spontán, véletlenszerűen (hangulati módon) történik változás.

Az egyik legegyszerűbb kétállapotú Potts-modell az ún. *Ising-modell*, amelyben a rendszer elemei csak két lehetséges elemi állapottal rendelkeznek, jelen cikkünkben ezt tárgyaljuk, hiszen a lényegi vonások függetlenek az elemi állapotok számától. Jelölje az i indexű elem állapotát $s_i = \pm 1$ és vegyük figyelembe, hogy a szomszédos elemek közötti kölcsönhatás az elemi állapotok szorzatával arányos potenciálisenergia-változást eredményez. Egy elem E potenciális energiáját (Hamilton-függvényét) könnyen felépíthetjük úgy, hogy az *energiaminimum elvét* követve az egymást erősítő („vonzó") lokális szomszéd-szomszéd állapotkapcsolatok csökkentsék, az egymást gyengítő („taszító") állapotkapcsolatok pedig növeljék az energia értékét, illetve az E energiát növelő („taszító"), illetve csökkentő („vonzó") külső tereket veszünk figyelembe, pl.:

$$E(s_i) = -\left(J \cdot \sum_{j}^{(\text{"}szomszéd\text{"})} s_j s_i \right) - H \cdot s_i = -s_i \cdot \left(J \cdot \sum_{j}^{\text{"}szomszéd\text{"}} s_j + H \right), \tag{2.1}$$

amelyekben az összegzés a kiszemelt elemmel lokális kölcsönhatásban levő „szomszédos" (ez nem feltétlen valós térbeli közelséget jelent, gondoljunk pl. az internet virtuális terére) elemeken fut végig, J a lokális kölcsönhatás erősségét, H a globális külső hatás erősséget jellemző paraméter. A modell viselkedését számítógépes szimulációval tanulmányozhatjuk a *Monte-Carlo módszerek* közé tartozó ún. *Metropolis-algoritmus* [4][5] segítségével, amelyben használjuk még a véletlenszerű fluktuáció intenzitását megadó T paramétert is és bevezetjük a:

$$h = \frac{H}{k_B T} \text{ és } k = \frac{\langle z \rangle J}{k_B T} \tag{2.2}$$

dimenzió nélküli paramétereket, ahol k_B egy specifikus állandó (fizikai rendszerekben T a hőmérséklet, k_B pedig a *Boltzmann-állandó*), $<z>$ a lokális szomszédok (átlagos) száma.

A rendszer globális (makroszkopikus) állapotának jellemzésére bevezetjük az:

$$m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} s_i = \frac{N_+ \cdot (+1) + N_- \cdot (-1)}{N} \tag{2.3}$$

ún. *rendparamétert*, ahol N_+, illetve N_- a +1, illetve -1 állapotú elemek számát jelenti (a rendparaméter értéke +1, illetve -1 a homogén, teljesen rendezett állapotokban és 0 a rendezetlen állapotban).

A fenti modellre épülő szimulációs vizsgálataink olvashatók [4] cikkünkben, ahol bemutatjuk, hogy a modellel olyan fontos és érdekes jelenségek tárgyalhatók, mint a *domén-képződés, frakciók szétválása, térbeli struktúrák (mintázatok) kialakulása, fázisátalakulás, spontán szimmetria-sértés és a hiszterézis*. A fenti jelenségeknek a modell mikroszkopikus részleteitől független *univerzális* jellegét illusztrálja az [5] publikációnkban általunk bevezetett ún. *csatolt Zeemann-gép hálózat* modellünk tárgyalása. Jelen tanulmányunkban a modell újabb szempontú vizsgálatát és alkalmazási lehetőségét kívánjuk bemutatni.

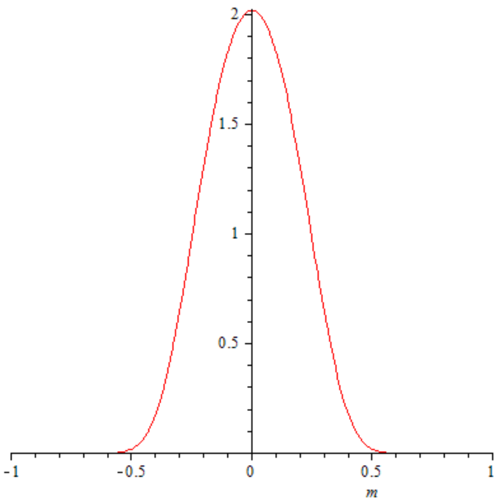
Az *m rendparaméter* a rendszer fluktuációi miatt *sztochasztikus változó*, melynek valószínűség-eloszlását jelöljük *f(m,t)*-vel. Az *f(m,t)* valószínűség-eloszlás alapján képet kaphatunk a rendszer statisztikus tulajdonságairól (Gibbs-kép). Az *f(m,t)* valószínűség-eloszlás időbeli változását az ún. *(Chapman-Kolmogorov) master-egyenlet* adja meg teljes általánossággal:

$$\frac{\partial f(m,t)}{\partial t} = \sum_{m^*} w(m^*; m) \cdot f(m^*) - f(m) \cdot \sum_{m^*} w(m; m^*) , \tag{2.4}$$

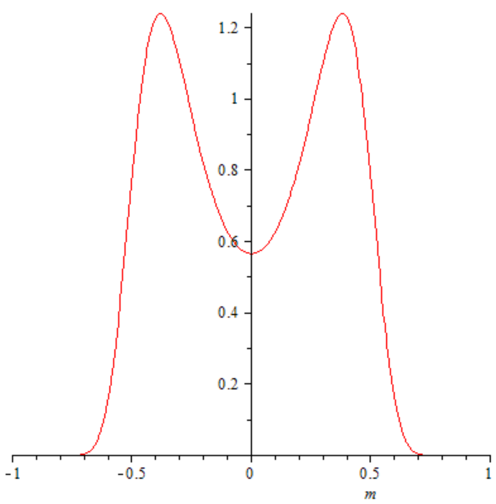
amelyben $w(m^*;m)$ és $w(m;m^*)$ rendre azt a valószínűséget jelenti, amellyel a m^* állapot m-re, illetve m állapot m^*-ra változik egységnyi idő alatt. A master-egyenlet valamely rendszerre való konkrét felírásának nehézségét az átmeneti valószínűségek megadása jelenti, amelyeket vagy szemléleti megfontolások alapján heurisztikusan vehetünk fel, vagy valamilyen fundamentális elv (pl. esetünkben a kanonikus sokaság mögötti szabadenergia-minimum) alapján határozhatunk meg. Miután az átmeneti valószínűségeket meghatároztuk és beírtuk (2.4)-be, a master-egyenlet $\frac{\partial f_s(m,t)}{\partial t} = 0$ stacionárius megoldását kell megkeresnünk. A modell részletes matematikai tárgyalását a Függelékben adjuk meg. Az $f_S(m,t)$ függvényt természetesen a h, k paraméterek, valamint az N elemszám határozza meg, tanulmányozása fontos tanulságokkal szolgál.

3. Numerikus vizsgálatok és értelmezések

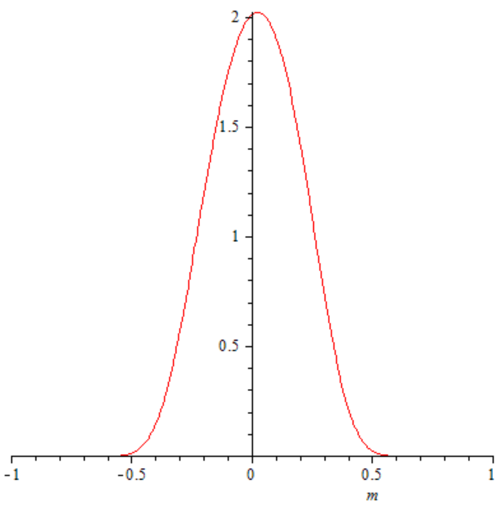
Az (F.5) formulával adott stacionárius valószínűségeloszlás-függvényt MAPLE program segítségével határoztuk meg, a K_1 és K_2 kifejezéseket (F.4a) definiálja. A program három paramétert vár: a k lokális kölcsönhatási és a h globális (külső tér) hatási paramétereket (lásd (2.2)-ben) és az N elemszám paramétert. A 3.1 és 3.2 ábrasorokon mutatunk be néhány jellegzetes eloszlásgörbét. A 3.1 ábrasoron N = 400, míg a 3.2 ábrákon N = 2500 az elemszám.



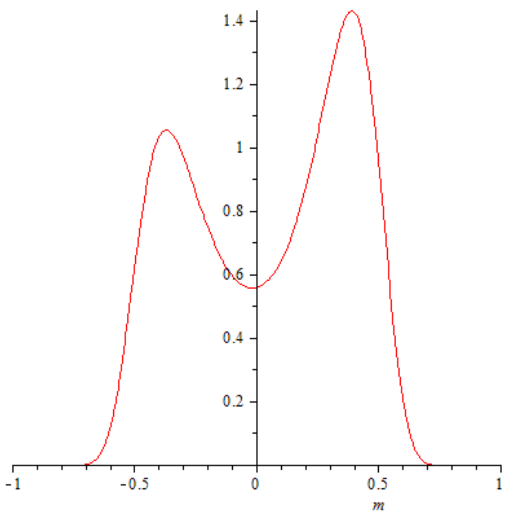
3.1.a ábra: N=400 , k=0,95 , h=0



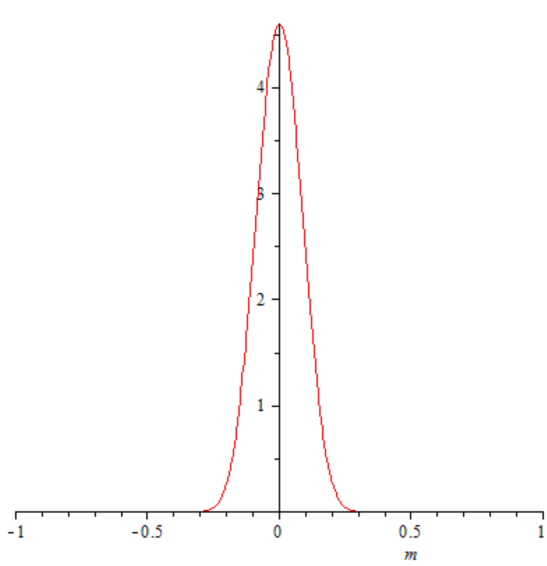
3.1.b ábra: N=400 , k=1,05 , h=0



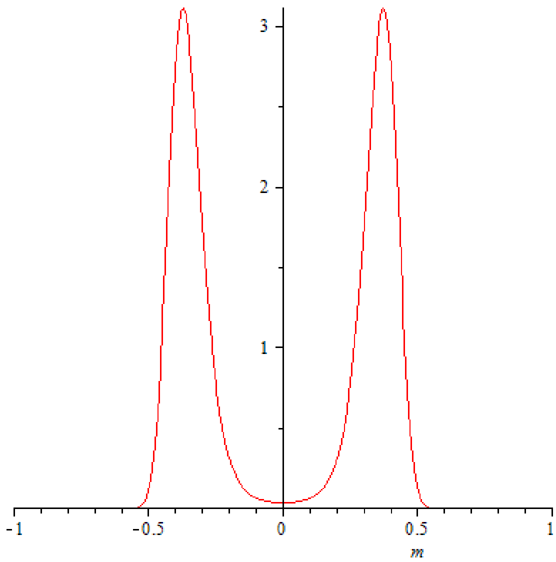
3.1.c ábra: N=400 , k=0,95 , h=0,001



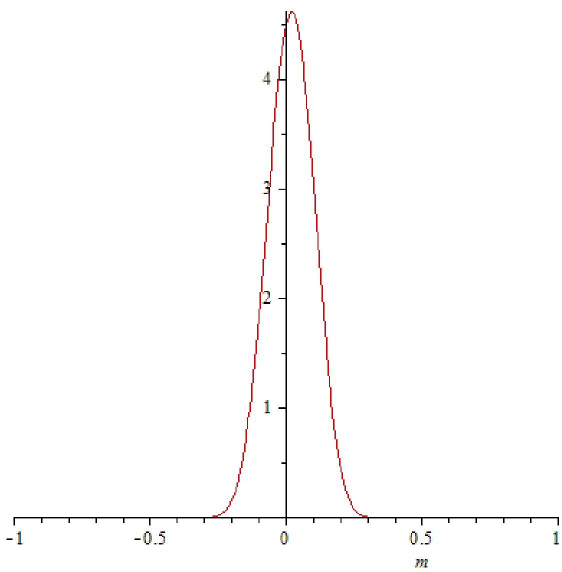
3.1.d ábra: N=400 , k=1,05 , h=0,001



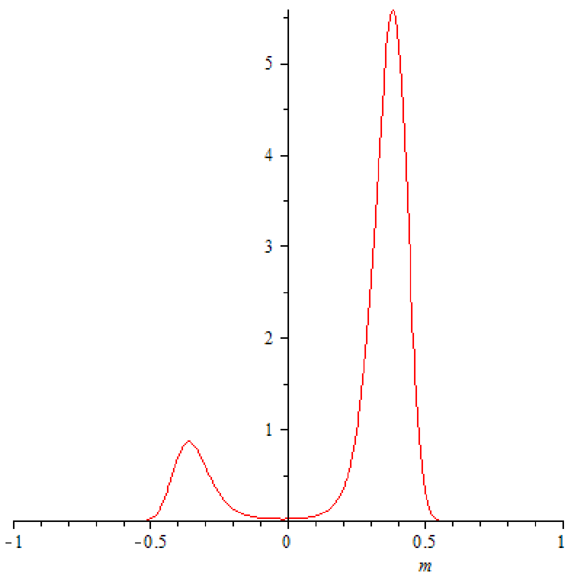
3.2.a ábra: N=2500 , k=0,95 , h=0



3.2.b ábra: N=2500 , k=1,05 , h=0



3.2.c ábra: N=2500 , k=0,95 , h=0,001



3.2.d ábra: N=2500 , k=1,05 , h=0,001

Összehasonlítva azokat az ábrákat, melyeknél a *k* kölcsönhatási paraméter értéke azonos, de *h* különbözik, láthatjuk, hogy *a külső hatás megjelenése eltorzítja, „polarizálja", aszimmetrikussá teszi az eloszlást (*az egyik stabil egyensúlyi állapotot kiemeli, a másikat elnyomja*). A „polarizáció" mértéke a h, illetve k paraméterek értékének növekedésével fokozódik.*

$k < 1$ kölcsönhatási paraméterértékek mellett a rendszer egyetlen stabil egyensúlyi állapotát az $m_e = 0$ rendparaméterű rendezetlen makroállapot jelenti, ekkor tehát az egyes elemek állapota olyan véletlenszerű eloszlást követ, hogy a rendszer egészére az eredő állapot várhatóértékben 0 lesz.

$k > 1$ kölcsönhatási paraméterértékek esetén az $m_e = 0$ rendezetlen állapot instabil egyensúlyi állapottá válik (az $m_e = 0$ továbbra is szélsőérték, de a szabadenergiának nem minimuma, hanem maximuma), *és megjelenik két szimmetrikus $m_e \neq 0$ rendparaméterű rendezett stabil egyensúlyi állapot*, tehát a rendszer globális állapota rendezettséget mutat.

A *k* kölcsönhatási paraméter tehát a rendszer stabilitását meghatározó változó, az ilyen mennyiségeket *kontrollparaméter*nek nevezzük. A kontrollparaméter *kritikus értéke* a $k = 1$, melyhez alulról közelítve a rendezetlen makroállapot elveszíti stabilitását és „belezuhan" valamelyik rendezett állapotba úgy, hogy *a k kölcsönhatási paraméter folytonos változtatásával az m rendparaméter értéke is folytonos módon változik meg nulláról (ún. másodrendű fázisátalakulás)*. A két rendezett állapot egyenértékű, a rendszer a *lokális fluktuációk hatására* egyenlő valószínűséggel véletlenszerűen kerül valamelyikbe.

$k < 1$ esetén a rendszert csak az $m = 0$ közelében találhatjuk számottevő valószínűséggel, míg $k > 1$ esetén éppen ez a legkisebb valószínűségű állapot, és két szimmetrikus rendparaméterű állapotban jelenik meg az eloszlás maximuma (*k* paraméter növelésével a maximumok távolodnak és „élesednek").

Társadalmi jelenségekre egyszerűen és világosan értelmezhetjük eredményünket például a következő gondolatkísérlet alapján. Tekintsünk mondjuk száz azonos (elegendően nagy, például 1000 fős) létszámú embercsoportot. Minden csoportban végeztessünk el szavazást valamilyen kirívóan érdektelen dologban (ezzel a rendszer kezdőállapotának homogén voltát biztosítjuk), pl. hogy rózsaszínű, vagy zöld fruttit gyártsanak-e a jövőben. Biztosítsuk a szavazás teljes titkosságát, az emberek elkülönítését (*k* kölcsönhatási paraméter közel zérus!) és zárjunk ki mindenféle külső (reklám, propaganda, médiák stb.) hatást ($h = 0$!). Megállapítva az egyes csoportokban az N_+ (mondjuk a rózsaszín fruttira szavazók száma) és N_- (a zöld fruttira voksolók száma) értékét, majd (2.3) szerint az *m* rendparamétert, azt találjuk, hogy *m* az $m_e = 0$ körül ingadozik kicsiny szórással úgy, hogy az összes csoportra vett átlag majdnem pontosan nulla. Ha most oly módon változtatjuk meg a szavazás körülményeit, hogy az egyes csoportokban vitafórum előzze meg a szavazást, sőt esetleg nyílt szavazást rendelünk el, akkor drasztikusan eltérő eredményt tapasztalunk. Ekkor ugyanis egyesek saját kedvenc színük előnyeinek méltatásával, vagy ami gyakoribb, a másik szín hátrányainak ecsetelésével (érdemes lenne modellezni azt is, hogy ez a negatív propaganda miért hatásosabb!) próbálnak meggyőzni másokat, azaz az emberek befolyásolják egymást ($k > 1$). Azt tapasztaljuk, hogy az egyes csoportokban véletlenszerűen – attól függően melyik csoportba hány „elhivatott" rózsaszín vagy zöld hívő kerül, akik aztán maguk mellé állítják a közömböseket és ingadozókat – az *m* értéke szignifikánsan és jelentősen eltér nullától, tehát az egyes csoportokban ezúttal egyértelmű döntés születik (rendezett állapot). Az összes csoportra (statisztikus sokaságra) vett átlag azonban ezúttal is közel marad nullához, tehát összesítésben ekkor sincs határozott döntés.

Az eddigiekben azt megtárgyaltuk, hogy miként befolyásolja a *k* kölcsönhatási, illetve *h* külső hatási paraméter értéke a rendszer viselkedését. Vizsgáljuk meg most az *N* elemszám szerepét!

N lényegesen befolyásolja a stacionárius eloszlást, melyet a 3.1 és 3.2 ábrasorok összevetésével szemléltethetünk: a két ábrasoron a *k* és *h* paraméterek értéke rendre megegyezik, csak az *N* elemszám tér el, de a két eloszlás drasztikusan különbözik. Hogy jól megértsük miről is van szó, végezzük el a következő gondolatkísérletet: szavaztassunk meg két százezer fős tömeget frutti-ügyben, azonos körülmények között, de más csoportfelosztással. Az egyik százezres tömeget osszuk fel 250 darab 400 fős csoportra, a másik százezres tömeget pedig 40 darab 2500 fős csoportra. A csoportokat különítsük el, majd minden csoportban tartsunk gyűlést, vitafórumot úgy, hogy közben propagandát fejtünk ki a rózsaszín frutti mellett, pl. egy szónok mindegyik csoportban elmondja ugyanazt a beszédet, ecsetelve a rózsaszín esztétikai előnyeit, ócsárolva a zöld szín közönséges voltát (tehát biztosítjuk, hogy *k* és *h* értéke mind az ezerszáz darab csoportban közel azonos!). A gyűlések végén tartsunk szavazást minden csoportban azonos körülmények között és határozzuk meg az *m* rendparaméter értékét csoportonként. Ábrázoljuk *m* relatív gyakoriságát külön-külön a két százezres tömegre: a 250 darab 400 fős csoport eloszlása a 3.1.d ábrán látható jellegű, míg a 40 darab 2500 fős csoport eloszlása a 3.2.d ábrán látható jellegű lesz! Az ugyanolyan hatások és körülmények között levő rendszerek viselkedését az elemszám döntően befolyásolja: *az elemszám növekedésével egyre élesebb, „szélsőségesebb" eredő állapot jelenik meg*.

Ezt a jelenséget a társadalom szintjén mindenki ismeri – és régóta ki is használják – *tömeghatás*nak, vagy *tömegpszichózis*nak nevezzük. A kommunista és fasiszta rendszerek – melyek lényegileg azonosak – egyik alaptörvénye, hogy az embereknek csak tömeggyűlés formájában szabad csoportosulni (ezeket támogatták és szervezték is), de a kisebb csoportokat felszámolták. A tömeggyűléseken az *N* nagy értéke és *k* kölcsönhatás felerősödése miatt egészen kicsi *h* hatás is egyértelműen determinált, szélsőséges hatást váltott ki. Szinte hihetetlen, hogy tömegben mire képes az ember: a legtöbb ember megdöbbenne, ha (pl. egy videó-felvételen) látná, hogy mit is csinált mondjuk egy futballmeccsen, vagy rock-koncerten, miként ordított torkaszakadtából, hogyan ujjongott, vagy dühöngött, miket skandált a tömeggel, hogyan ugrabugrált és hadonászott. *A tömegben az egyén feloldódik, elveszti személyiségét, a tömeg nem tekinthető emberek halmazának, a tömeg nem mutat emberi jegyeket, egészen más tulajdonságokkal bír, sokkal primitívebb eszközökkel formálható, mint az egyes emberek.*

[3] honlapunkon bemutatjuk néhány életből lopott jelenet videó-felvételét példaként a tömeghatás érvényesülésére. A *Pánik* című videón az egyik legfontosabb és sokszor tragikus kimenetelű példáját szemlélhetjük a tömeghatásnak: nagy tömegben egy csekély effektus (jelen esetben egy ordítás) szélsőséges hatású reakció „lökéshullámot” kelthet, a pánik lavinaszerűen terjed és katasztrofális globális kimenet következhet be. A *Hullámzó tömeg* film igazi kooperatív jelenséget mutat be: a tömegben a mikroszkopikus elemek (emberek) együttes mozgása makroszkopikus léptékben minőségileg új mozgásformaként, hullámformaként jelenik meg. A *Mussolini* videón ijesztő példáját láthatjuk annak, hogy a tömeg viselkedését milyen mértékben szabhatja meg akár egy hatásvadász, eszelős pojáca. Az emberekből álló tömeg elveszítheti minden emberi jellegét. Ez történik a *Fekete péntek* videón is: a kiárusítás, (virtuális) árleszállítás egyedenként izgalomba hozza és a tömeghatás következtében őrületbe lovalja az embereket. A *Budweiser* című videó a tudományos rangra emelt tömegmanipulációra mutat példát: az ún. *neuromarketing* (érdemes erre a címszóra az interneten rákeresni, döbbenetes dolgokra bukkanhatunk!) a reklámok hatásmechanizmusát a legkorszerűbb tudományos eszközökre építve kutatja (lásd pl. [6]).

Függelék

A rendszer statisztikus viselkedésének tanulmányozásához először a (2.4) master-egyenlet konkrét alakját kell felírnunk a modellre, amelyhez a *w* átmeneti valószínűségeket kell megkeresnünk. Termikus egyensúlyi állapotban levő rendszerekben a mikroszkopikus reverzibilitás következményeként fennáll az ún. *részletes egyensúly elve*, amely megköveteli, hogy az időegységenkénti átmenetek száma az $\vec{s}$ állapotból az $\vec{s}^*$ állapotba ugyanannyi legyen, mint a az $\vec{s}^*$ állapotból az $\vec{s}$ állapotba az inverz folyamat révén, azaz:

$$w\left(\vec{s}^*;\vec{s}\right)\cdot P\left(\vec{s}^*\right)=w\left(\vec{s};\vec{s}^*\right)\cdot P\left(\vec{s}\right)$$

A kétállapotú rendszerben az $\left(N_+,N_-\right)$ betöltési-szám állapothoz tartozó makroszkopikusan mérhető *m* rendparaméter:

$$m=\frac{2N_+}{N}-1=1-\frac{2N_-}{N} \tag{F.1}$$

Az $\left(N_+-1;N_-+1\right)$ „alsó” szomszéd betöltési-szám állapothoz tartozó *m** rendparaméter:

$$m^*=m-\frac{2}{N},$$

Míg az $\left(N_++1;N_--1\right)$ „felső” szomszéd betöltési-szám állapothoz tartozó *m***:

$$m^{**}=m+\frac{2}{N},$$

Példaként írjuk fel a részletes egyensúly elvét az *m* és *m** állapotok között:

$$w_m\left(+1;-1\right)\cdot f_m\left(s_i=+1\right)=w_{m^*}\left(-1;+1\right)\cdot f_{m^*}\left(s_i=-1\right)\ ,$$

ahol pl. $w_m(+1;-1)$ jelenti a *m* makroszkopikus állapotban levő rendszer valamely +1 állapotú elemének -1 állapotba történő időegységre vonatkoztatott átmeneti valószínűségét. Felhasználva az Ising-modell $f_m(s_i) = \frac{1}{Z} e^{(h+km)s_i}$ kanonikus eloszlását kapjuk, hogy:

$$w_m(+1;-1) \cdot \frac{1}{Z} e^{(h+km)} = w_{m^*}(-1;+1) \cdot \frac{1}{Z} e^{-(h+km^*)}$$

$$w_m(+1;-1) \cdot \frac{1}{Z} e^{(h+km)} = w_{m^*}(-1;+1) \cdot \frac{1}{Z} e^{-\left[h+k\left(m-\frac{2}{N}\right)\right]}$$

$$w_m(+1;-1) \cdot \frac{1}{Z} e^{(h+km)} = w_{m^*}(-1;+1) \cdot \frac{1}{Z} e^{-(h+km)} e^{\frac{2k}{N}}$$

$$w_m(+1;-1) \cdot \frac{1}{Z} e^{(h+km)} e^{-\frac{2k}{N}} = w_{m^*}(-1;+1) \cdot \frac{1}{Z} e^{-(h+km)}$$

$$w_m(+1;-1) \cdot \frac{1}{Z} e^{(h+km^*)} = w_{m^*}(-1;+1) \cdot \frac{1}{Z} e^{-(h+km)} \quad ,$$

amiből:

$$w_m(+1;-1) = w_0 e^{-(h+km)} \text{ és } w_m(-1;+1) = w_0 e^{(h+km)}, \tag{F.2}$$

ahol w_0 a *T* paraméterrel arányos „frekvencia” (amely kifejezések eleget tesznek az átmeneti valószínűségektől elvárt pozitív szemidefinit tulajdonságnak).

A rendparaméter átmeneti valószínűségei:

$$\left.\begin{aligned} w(m^*;m) &= (N_- + 1) \cdot w_{m^*}(-1;+1) \\ w(m^{**};m) &= (N_+ + 1) \cdot w_{m^{**}}(+1;-1) \\ w(m;m^*) &= N_+ \cdot w_m(+1;-1) \\ w(m;m^{**}) &= N_- \cdot w_m(-1;+1) \end{aligned}\right\} . \tag{F.3}$$

A (2.4) master-egyenlet ekkor tehát:

$$\frac{\delta f(m;t)}{\delta t} = w(m^*;m) f(m^*;t) + w(m^{**};m) f(m^{**};t) - \left[w(m;m^*) + w(m;m^{**})\right] f(m;t) \quad ,$$

amelybe beírva (F.3) és (F.2) kifejezéseket és felhasználva az (F.1) összefüggést, majd az egyenlet jobboldalát az *m* rendparaméter érték körül *1/N* szerint első rendig sorba fejtve az alábbi parciális differenciálegyenlethez jutunk:

$$\frac{\delta f(m,t)}{\delta t} = -K_1(m) \cdot k \cdot f(m,t) + K_2(m) \cdot k \cdot \frac{\delta f(m,t)}{\delta m}, \tag{F.4}$$

amelyben:

$$\left.\begin{aligned} K_1(m) &= w_0 \cdot \left[\sinh(h+km) - m \cdot \cosh(h+km)\right] \\ K_2(m) &= \frac{w_0}{N} \cdot \left[\cosh(h+km) - m \cdot \sinh(h+km)\right] \end{aligned}\right\} . \tag{F.4a}$$

Az eloszlásfüggvény $\frac{\delta f_S(m;t)}{\delta t} = 0$ stacionárius megoldását az:

$$f_S(m) = C \cdot e^{\int_1^m \frac{K_1(x)}{K_2(x)} dx} \qquad \text{(F.5)}$$

integrálformulával kaphatjuk meg.

Köszönetnyilvánítás

A tanulmány elkészítését a Magyar Tudományos Akadémia Tantárgy-pedagógiai Kutatási Programja támogatta.

Köszönettel tartozunk a kutatás támogatásáért, amely az EFOP-3.6.1-16-2016-00006 „A kutatási potenciál fejlesztése és bővítése a Neumann János Egyetemen” pályázat keretében valósult meg. A projekt a Magyar Állam és az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával, a Széchenyi 2020 program keretében valósul meg.

Irodalomjegyzék

[1] Méray-Horváth K. „Társadalomtudomány mint természettudomány”, Szociológiai könyvtár, Az Athenaeum irodalmi és nyomdai R.-T. ki-adása, Budapest, 1912.
[2] http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011_0001_520_szocialpszichologia/ch03s04.html
[3] http:/csodafizika.hu/th
[4] Nagy P., Tasnádi P.: Fortuna szekerén, FIZIKAI SZEMLE 67:(1) pp. 21-27. (2017)
[5] P. Nagy, P. Tasnádi: Networks of Zeeman catastrophe machines for the investigation of complex systems, EUROPEAN JOURNAL OF PHYSICS 35: Paper 045010. 18 p. (2014)
[6] https://imotions.com/blog/neuromarketing-examples/