

A SZEKVENCIAÁLIS VALÓSZÍNŰSÉG HÁNYADOS TESZT FELHASZNÁLÁSÁNAK SOKSZÍNŰSÉGE

USABILITY OF THE SEQUENTIAL PROBABILITY RATIO TEST

Dobján Tibor^{1*},

¹ Informatika Tanszék, GAMF Műszaki és Informatikai Kar, Pallasz Athéné Egyetem, Magyarország

Kulcsszavak:

Wald Ábrahám
Szekvenciális valószínűség
hányados teszt
Rezgéselemzés vizsgálat
Vezeték nélküli szenzorhálózat
Számítógépes adaptív tesztelés

Keywords:

Abraham Wald
Sequential Probability Ratio Test
Vibration Analysis Test
Wireless Sensor Network
Computerized Adaptive Testing

Cikktörténet:

Beérkezett 2016. szeptember 10
Átdolgozva 2016. október 31.
Elfogadva 2016. november 5.

Összefoglalás

Napjainkban a szekvenciális valószínűség-hányados teszt (SPRT) statisztikai döntési algoritmust a tudomány több ágazatában is használják. A cikkben a módszer ismertetése után olyan felhasználási példákra szeretnék rávilágítani, mint a rezgéselemzéses roncsolásmentes vizsgálatok (VAT, NDT) esetében az akusztikus borszt jelek detektálása vagy a számítógépes adaptív tesztelés (CAT) során a vizsgázók tesztelésére vagy a kakaófűró moly menedzsmentben (CPBM) a szekvenciális mintavételi tervek készítése, valamint a vezeték nélküli szenzorhálózatoknál (WSN) a szomszédos szenzorok minősítése.

Abstract

Nowadays the Sequential Probability Ratio Test (SPRT) statistical decision making algorithm is used in lot of areas of science. In this paper I would like to shown some examples like burst detection in Vibration Analysis Test(VAT) in the field of Non Destructive Testing (NDT), or in the Computerized Adaptive Testing (CAT) for testing examinees, or in the Cocoa Pod Borer Management (CPBM) for creating sequential sampling plans, or in the Wireless Sensor Networks for classification of neighborhood notes.

1. Bevezetés

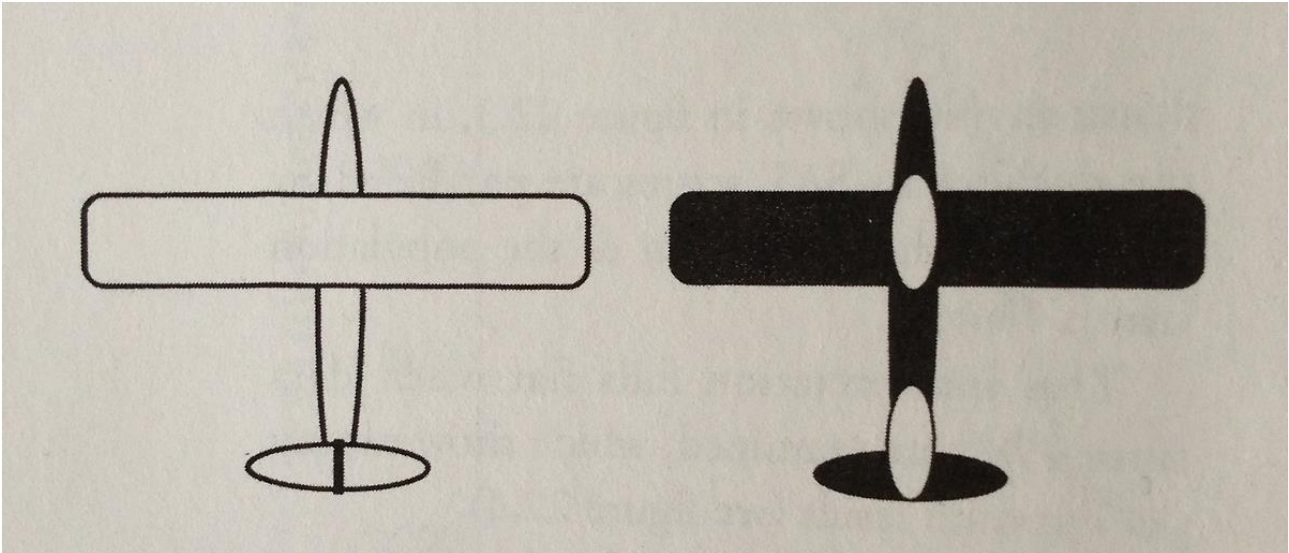
Tudományos munkám során sokat foglalkoztam a szekvenciális valószínűség-hányados teszt (SPRT) felhasználásával. Az SPRT-t Wald Ábrahám, magyar származású matematikus fejlesztette ki a második világháború idején. A cikkben szeretném bemutatni a munkásságát, valamint munkásságának eredményeit, illetve azt, hogy a gyakorlatban milyen sokféleképpen használható fel ez az algoritmus.

2. A módszer feltalálója

Wald Ábrahám 1902. október 31-én született Kolozsváron. 1927 és 1931 között szerzett doktori fokozatot a bécsi tudományegyetemen matematikusként. 1938-ban zsidó származása miatt az Amerikai Egyesült Államokba emigrált. 1939-től haláláig a Columbia Egyetemen tanított. Csatlakozott az egyetemen működő statisztikai kutatócsoporthoz [1].

* Dobján Tibor. Tel.: +36 76 516-425
E-mail cím: dobjan.tibor@gamf.kefo.hu

Egyik különösen érdekes feladata az volt a második világháború idején, hogy vizsgálja meg a csatákból visszaérkező repülőgépeket. A repülőgépek páncélzata nehéz, ezért nem lehet az egész gépet befedni, különben nem tudna felszállni. Munkatársaival ezért statisztikát készített arról, hogy a gépeken hol található sérülés. Úgy gondolták, hogy oda kell tenni páncélzatot, ahol a legnagyobb a sérülések száma. Az 1. ábrán láthatóak feketével jelölve a sérült részek.



1. ábra. Sértetlen repülő (balra), csatából visszatért repülőgépek sérülései (jobbra)[2]

Wald azonban megfordította a gondolatmentet. Úgy vélte, hogy a következtetések hibásak, mégpedig azért, mert nem áll rendelkezésre az összes repülőgép, csak azok, amelyek visszajöttek. Wald szerint pontosan oda kell tenni a páncélzatot (a pilóta, valamint a motor köré), ahol nem találtak sérüléseket a repülőkön. Hiszen azok a gépek, amelyek ott kaptak lövést, lezuhantak. A vizsgált sérülések bármelyikével még haza tudott jönni a pilóta [2][3].

A matematikai statisztikában Wald Ábrahám vezette be szekvenciális elemzés fogalmát. Eszerint jobb az adatokat létrejöttük után azonnal feldolgozni, mintsem összegyűjteni az összes adatot és utólag egyben elemezni. 1943-ban publikálta a szekvenciális valószínűség-hányados tesztet (SPRT) bemutató cikkét [4].

A sors iróniája, hogy repülőgép balesetben halt meg 1950. december 13-án. Egy tudományos körutazás közben lezuhant a gépe Indiában, Travancore-ban [1].

3. SPRT

Wald Ábrahám egy másik feladata az volt, hogy határozza meg a frontra induló lőszer-csomagok minőségét. A lőszergyárban 100 darabos rekeszekbe csomagolták a lövedékeket. A statisztikusnak azt kellett kimutatnia, várhatóan hány lőszer fog besülni a kilövés folyamán. Természetesen ha az összes lőszer ellövik, pontosan megtudhatták volna, hogy hány jó és hány rossz golyó van a csomagban, de akkor semmi sem jutott volna a frontra. A probléma megoldására egy olyan matematikai módszert kellett kifejlesztenie, amely a lehető legkisebb elemszámú minta mellett is nagy pontossággal adja meg a várhatóan működőképes lőszer számát [5].

3.1. Alapfüggvény

Ez a módszer a szekvenciális valószínűség-hányados teszt. Az alapfüggvénye az úgynevezett lambda függvény, amely az (1) egyenlettel írható le [6].

$$\lambda_i = \ln \left(\frac{p(x_1, x_2, \dots, x_i | H_1)}{p(x_1, x_2, \dots, x_i | H_0)} \right) \quad (1)$$

Ez egy logaritmus hányados függvény, ahol a számlálóban annak a valószínűsége áll, hogy a mért és előzetesen megszürt x értékek halmaza a $H1$ hipotézist (eloszlásfüggvényt) elégíti ki, míg a nevezőben annak a valószínűsége áll, hogy x értékek halmaza a $H0$ hipotézist (azaz az eloszlásfüggvényt) követik.

3.2. Alapfüggvény, Gauss eloszlást feltételezve

Az SPRT lambda függvényét nulláról indítjuk. Növekménye $\Delta\lambda$ pozitív előjelű, ha a $H1$ hipotézis érvényesül benne, azaz változás történt a megszokott háttérzajhoz képest, ugyanakkor negatív, ha nem történt változás. A $\Delta\lambda$ értékeket összeadva az idő függvényében kapjuk az alapfüggvény numerikus realizációját. Gauss eloszlások esetén, ha a két eloszlás csak a szórásban különbözik, tehát mindkettő várható értéke 0, akkor a lambda függvény mintavételenként a következő növekményekből adódik össze a (2) formulával leírható módon:

$$\Delta\lambda_i = \lambda_i - \lambda_{i-1} = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_0^2}{2\sigma_1^2\sigma_0^2} x_i^2 - \ln \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \quad (2)$$

3.3. Határértékek

A döntéshez az algoritmus számára két paramétert kell megadni: az „A” és a „B” határértékeket. Az alsó küszöbszám az „A” határérték, amely mindig negatív. Ha eléri az SPRT függvény, az azt jelenti, hogy az algoritmus dönt, mégpedig úgy, hogy a vizsgált adatsor eloszlása a $H1$ hipotézis szerinti eloszláshoz hasonlít. A felső küszöbszám a „B” határérték, ami azt jelenti, hogy az algoritmus úgy dönt, hogy a vizsgált adatsor eloszlása a $H0$ hipotézis szerinti eloszláshoz hasonlít. [6] Döntés után a függvény értékét mindig nullára igazítjuk [8].

Az A és a B határértékeket az elmaradt riasztás valószínűsége (Alarm Failure Probability, AFP) valamint a hibás riasztás valószínűsége (False Alarm Probability, FAP) alapján lehet kiszámítani, a (3) és a (4) egyenletbe behelyettesítve.

$$A = \ln \frac{AFP}{1 - FAP} \quad (3)$$

$$B = \ln \frac{1 - AFP}{FAP} \quad (4)$$

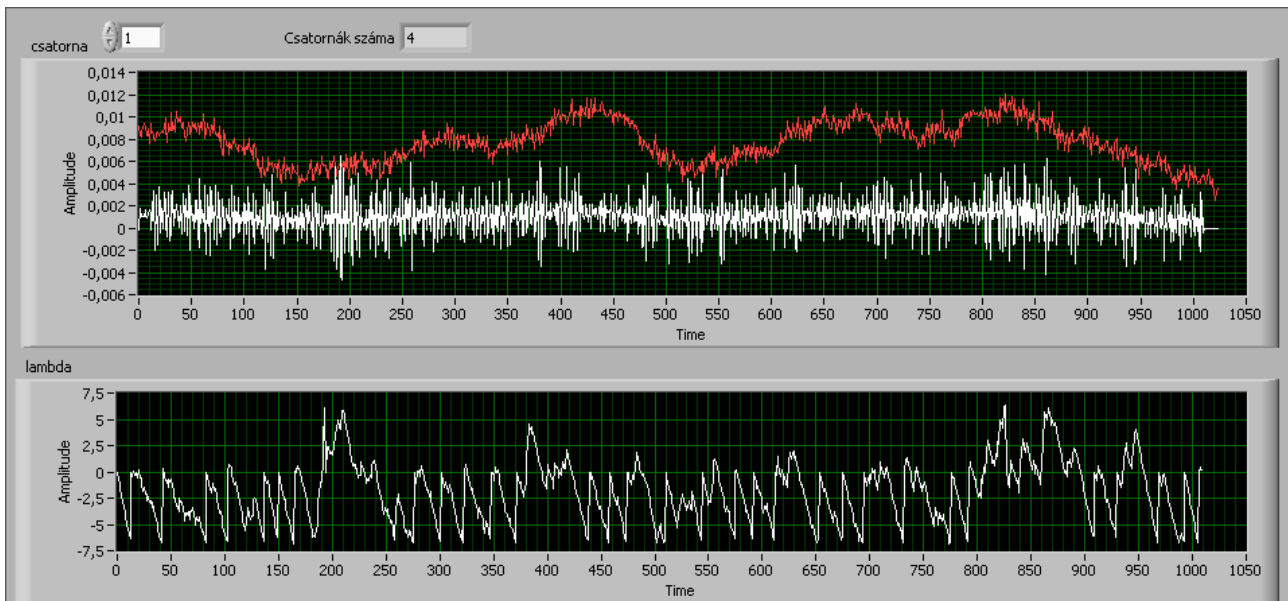
Az 1. táblázatban látható néhány tipikus érték.

1. Táblázat. AFP és FAP valószínűségi értékek [7]

AFP	FAP	A	B
10%	10%	-2,2	2,2
1%	1%	-4,6	4,6
0,1%	0,1%	-6,91	6,91
1%	10%	-4,5	2,29
0,1%	10%	-6,8	2,3

4. Rezgéselemzéses roncsolásmentes anyagvizsgálat (NDT-VAT)

A roncsolásmentes anyagvizsgálatok (Non-Destructive Testing, NDT) sorából a rezgéselemzéses vizsgálatok (Vibration Analysis Test, VAT) területén is felhasználják a taglalt statisztikai módszert.



2. ábra. SPRT ipari akusztikai mérés esetében [7]

Különböző fémszerkezeteken gyorsulásérzékelőket helyeznek el. A regisztrált gyorsulásértékek időbeni sorozatában borszt-szerű akusztikus események detektálására lehet felhasználni az SPRT-t, rendkívül zajos környezetekben. A 2. ábrán, az alsó diagramon látható a lambda döntési függvény. Az SPRT olyankor is észreveszi az apró borsztöket, amikor szabad szemmel már nem láthatóak [5][6][7][8].

4.1. Idősor elemei:

Gyorsulásérzékelők mért adatai.

4.2. H0 hipotézis:

A mért értékek egy akusztikus esemény részét képezik.

4.3. H1 hipotézis:

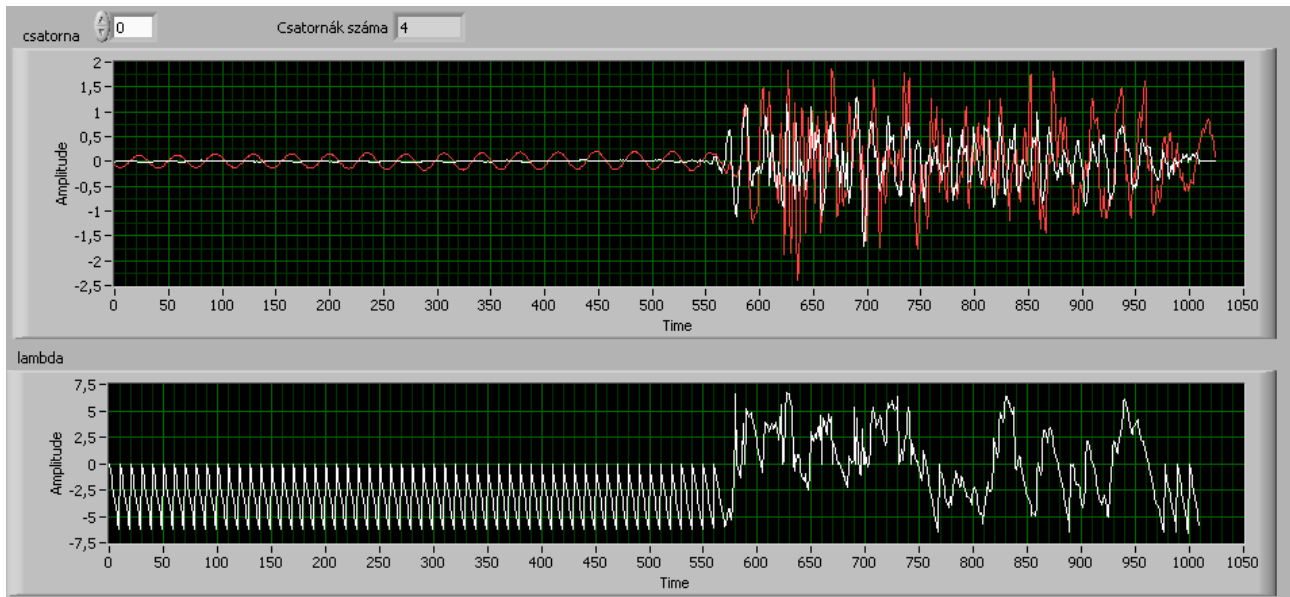
A mért értékek a háttérzaj osztályába sorolhatóak.

4.4. Magyarázó példa

A rezgésdiagnosztika területéről választott magyarázó példán belátható az SPRT működése.

A 3. ábrán a felső sávban látható egy szimulált gyorsulásérzékelővel mért időjel. Az alsó sávban pedig a szekvenciális valószínűség hányados teszt lambda függvénye látható. A kiértékelő függvény mindig „0”-ról indul. A következő mérési pont eredményével kiértékelődik a (2) egyenlettel meghatározott $\Delta\lambda$ növekmény, amely az eloszlások hányados értékétől függően lehet pozitív vagy negatív. Az algoritmus addig veszi sorra a mért értékeket, amíg a lambda függvény el nem éri valamelyik döntési határértéket. Ekkor létrejön a döntés: A vagy B, H0 vagy H1. A döntés után a lambda függvény újra előről, nulláról indul. Amikor a függvény épp nem ér el határértéket, akkor az algoritmus még nem tud döntést hozni, ezért újabb mintavételre van szükség. A 3. ábrán jól látható a jellegzetes fűrészfogszerű viselkedés az akusztikus esemény mentes szakaszon, ahol a lambda függvény a negatív végtelen felé tart.

Az 550. másodperc után az időjelben szemmel jól láthatóan egy borszt esemény jelenik meg. Ezzel párhuzamosan a lambda függvény növekményének előjele megváltozik.



3. ábra SPRT Magyarózó ábra

A 3. ábrán az elmaradt riasztás valószínűsége (Alarm Failure Probability, AFP), valamint a hibás riasztás valószínűsége is 0,1%-ra lett beállítva. Ezért a lambda függvény az 1. Táblázatból kiolvasható határértékek között $A=-6,91$, $B=6,91$ változott.

5. Kakaófűró moly menedzsment (CPBM)

A malajziai kakaó bizottság az SPRT-t használja szekvenciális mintavételi terv (Sequential Sampling Plan, SSP) készítéséhez. A kakaóbabok szemenkénti vizsgálata nagyon idő- és munkaigényes folyamat. A szekvenciális statisztikai módszert azért használják, mert a lehető legkisebb elemszámú minta esetén képes döntést hozni. A dél-ázsiai régióban elszaporodott a termőföldéken a kakaófűró moly (*Conopomorpha cramerella*, Cocoa Pod Borer, CPB). [9] A mintában szereplő rovarok száma empirikus vizsgálatok alapján negatív binomiális eloszlást mutat, amely közelít a véletlenszerű Poisson eloszláshoz.

5.1. Idősor elemei:

Learatott kakaóhévelyekben talált molylepkék száma.

5.2. H_0 hipotézis:

További idő- és munkaigényes vizsgálatok szükségesek.

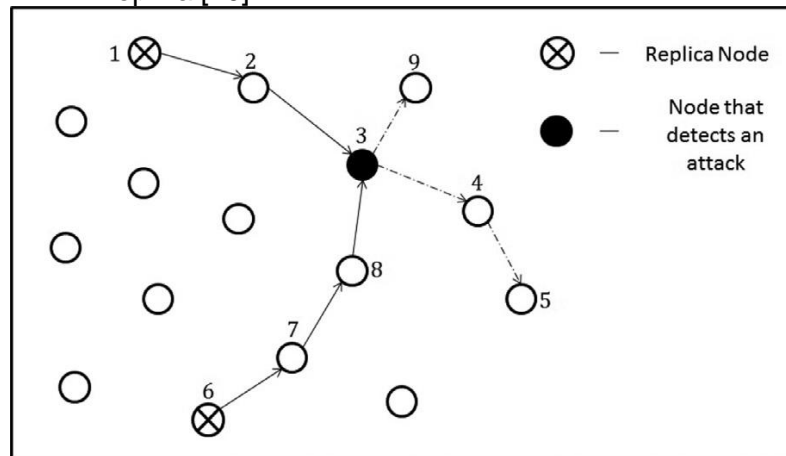
5.3. H_1 hipotézis:

A kakaóbab-feldolgozás fennakadás nélkül folytatódhat.

6. Vezeték nélküli szenzorhálózatok (WSN)

Az egyik legfrissebb felhasználási mód a vezeték nélküli szenzorhálózatok területéről származik. A WSN rendszerek számára jelentős biztonsági kockázatot jelent az úgynevezett replika támadás. Ilyenkor a hálózat egy mote-ját eltávolítják, a futó programot kielemezik, az azonosítóját pedig lemásolják. Így létre lehet hozni egy olyan replika mote-ot, amelynek a segítségével információkat lehet gyűjteni a hálózatról, a hálózat által megfigyelt objektumokról, vagy akár működésképtelenné is lehet tenni akár az egész rendszert [11]. Az SPRT segítségével amerikai és indiai kutatók létrehoztak egy olyan algoritmust, amellyel WSN mote-ok decentralizáltan egymás földrajzi elhelyezkedésének ismerete nélkül, mobilis rendszerben működve, nagy megbízhatósággal fel tudják ismerni a szomszédos mote-ok replika mivoltát.

Minden adatot küldő mote hozzátartozol egy mellékletet a küldendő adatokhoz. Ez a csomag tartalmazza a forrás és a cél mote-ok azonosítóit. Minden mote megvizsgálja ezt a mellékletet, hogy megállapítsa, az üzenet neki szól-e, vagy tovább kell küldenie. Ha egy mote a 4. ábrán látható módon, több útvonalon is kap csomagot ugyanazzal az azonosítóval rendelkező mote-któl, akkor az egyik közülük replika [10].



4. ábra Replikát detektáló mote [9]

6.1. Idősor elemei:

Hálózati csomagok sorozata.

6.2. H0 hipotézis:

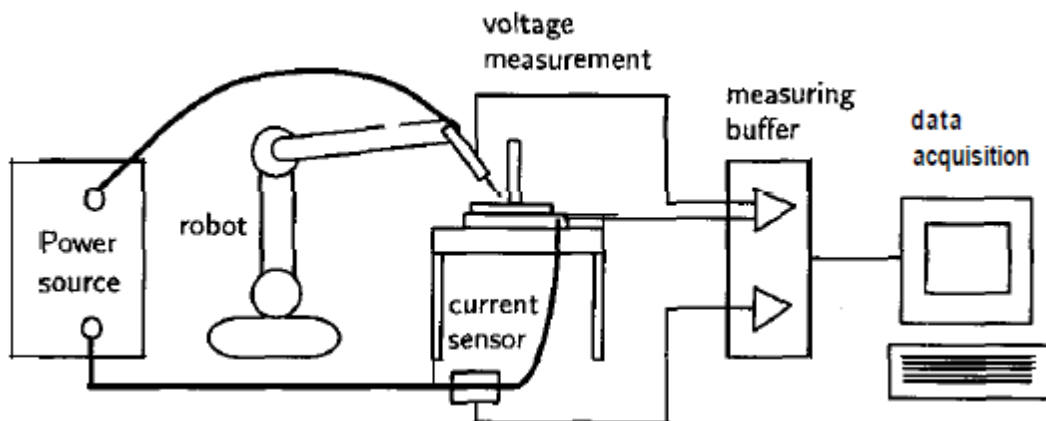
A hálózati csomagban lévő azonosító a hálózaton egyedi.

6.3. H1 hipotézis:

A hálózati csomagban lévő azonosítóból létezik egy másolat valahol a hálózatban.

7. Védőgázás ívhegesztés (GMA)

A hegesztési feszültég időjelében felfedezhető borszt-szerű fluktuációk eloszlásából lehet következtetni a hegesztés minőségére. Az SPRT segítségével lehetőség nyílik a védőgázás ívhegesztés körülményeinek on-line monitorozására [12]. A mérés elvi rajza az 5. ábrán látható:



5. ábra Hegesztés minősítő testrendszer elvi rajza [11]

7.1. Idősor elemei:

Elektromos hálózati tápfeszültség-ingadozás magas mintavételezéssel mért adatai.

7.2. H₀ hipotézis:

A hegesztési feltételek optimálisak.

7.3. H₁ hipotézis:

A hegesztési feltételek az optimálistól eltérőek.

8. Számítógépes adaptív tesztelés (CAT)

Az oktatás andragógiai és pedagógiai aspektusaiban is egyre nagyobb szerepet kap a számítógépes adaptív tesztelés (Computerized Adaptive Testing, CAT). A különböző feladatokhoz egy nehézségi értéket rendelnek. A vizsgázók a saját képességeiknek megfelelően individualizált itemeket (a legkisebb önállóan értékelhető egység) kapnak [14]. Így a feladatok nehézsége a vizsga folyamán beáll a vizsgázó képességi szintjére [13][15].

8.1. Idősor elemei:

A személyek által megválaszolt item-ek.

8.2. H₀ hipotézis:

A vizsgázónak sikerült a tesztje.

8.3. H₁ hipotézis:

A vizsgázónak nem sikerült a tesztje.

9. Számítógépes folyamatszabályozás (SPC)

A statisztikai folyamatszabályozásban különböző termelési folyamatok, vagy szolgáltatások minőségét vizsgálják. Kiértékelő kártyák segítségével vizualizáltan figyelik a folyamat statisztikai paramétereinek változását. Nem megfelelő változás esetén riasztanak. A számítástechnikai hardver- és manapság egyre inkább szoftver-világban megfogalmazott: megbízhatóság, elérhetőség, használhatóság (Reliability, Availability and Serviceability, RAS) [16] minőség jellemzők vizsgálatában az SPRT kiemelt szerepet kap [17].

9.1. Idősor elemei:

Statisztikai célú megfigyelés alatt álló folyamatok aktuális értékei.

9.2. H₀ hipotézis:

A folyamat ingadozása véletlenszerű, időben állandó, nincsenek jól felismerhető és megnevezhető okai, a jellemző jövőbeli értékei statisztikai módszerekkel megadható határok között vannak.

9.3. H₁ hipotézis:

A megvizsgált folyamat instabil, statisztikailag nem szabályozott.

10. Továbbiak

A sok alkalmazás közül a rezgésdiagnosztikát fogom folytatni. A jelenleg meglévő alkalmazásokban, az SPRT lambda függvényének számításához különböző paraméterezéssel felírt Gauss eloszlásfüggvények hányadosát használunk. A további kutatásaimban abból a feltevésből szeretnék kiindulni, hogy az akusztikus eseménynek lehet a normálistól eltérő eloszlása is. Ilyen módon hatékonyabb, a rezgéselemzés problémájára optimalizált algoritmust lehet előállítani.

Irodalomjegyzék

- [1] J J O'Connor and E F Robertson: Abraham Wald [Online]. Available: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Wald.html> [Megtekintés: 24-Aug-2016].
- [2] Mark Wilson How A Story From World War II Shapes Facebook Today. [Online]. Available: <http://www.fastcodesign.com/1671172/how-a-story-from-world-war-ii-shapes-facebook-today> [Megtekintés: 24-Aug-2016].
- [3] Marc Mangel, Francisco J. Samaniego: Abraham Wald's Work on Aircraft Survivability, *Journal of the American Statistical Association*, Volume 79 Issue 386 (Jun., 1984), pp 259-267
- [4] Wald Ábrahám: Sequential Tests of Statistical Hypotheses, *Annals of Mathematical Statistics* 16 (2): 117–186, 1945 Június, doi:10.1214/aoms/1177731118, JSTOR 2235829
- [5] Dr. Pór Gábor: Műszaki diagnosztika 2. Korszerű műszaki diagnosztikai módszerek [Online] Available: http://www.tankonyvtar.hu/en/tartalom/tamop412A/2010-0013_muszaki_diagnosztika_2_korszeru_muszaki_diagnosztikai_modszerek/2_1_egy_korai_csaknem_kezdeti eredeti_feladat_amely_jol_peldazza_mikor_igen_hasznos_ez_az_eljaras.html [Megtekintés: 30-Aug-2016].
- [6] G. Szappanos, G. Por: Improvements in the Theory of Identification of Burst-Shaped Events for Fault Diagnosis, *Nuclear Science and Engineering*, vol. 13., pp. 261-267, (1999)
- [7] Tibor Dobján, Szilveszter Pletl, Tamás Deák, László Doszpod, Gábor Pór Identification of the Place and Materials of Knocking Objects in Flow Induced Vibration *Acta cybernetica-Szeged* 20:(1) pp. 53-67. (2011)
- [8] Dobján Tibor, Deák Tamás, Tavasz Zsolt Ferenc, Pór Gábor: Intelligens adatgyűjtő rendszer megvalósítása beágyazott számítógépeken, *Informatika Korszerű Technikai Konferencia 2010. Konferencia helye, ideje: Dunaújváros, Magyarország, 2010.03.05-2010.03.06. Dunaújváros: Dunaújvárosi Főiskola (DF), 2010. pp. 61-69. (ISBN:978-963-9915-38-1)*
- [9] Albert Ling Sheng Chang: The Use of Wald's Sequential Probability Ratio Test (SPRT) in Cocoa Pod Borer Management, *Jurnal Teknologi* 63:2 (2013), pp. 5–10, eISSN 2180–3722, ISSN 0127–9696
- [10] Venkatesh Manickavasagama, Jayashree Padmanabhanb: A mobility optimized SPRT based distributed security solution for replica node detection in mobile sensor networks, *Elsevier, AdHoc Networks* 37 (2016) pp 140–152
- [11] B.Parno, A.Perrig, V.Gligor, Distributed detection of nodereplication attacks in sensornet works, in: *Proceedings of IEEE Symposium on Security and Privacy*, 2005, pp.49–63.
- [12] Stefan Adolffsson, Ali Bahrami: A sequential probability ratio test method for quality monitoring in robotised GMA welding, *Tencon '96, IEEE Tencon. Digital Signal Processing Applications*, Volume: 2 pp. 1622-1628.
- [13] Theo J.H.M. Eggen: The Sequential Probability Ratio Test in Educational Testing, *Applied Psychological Measurement* September 1999 vol. 23 no. 3 pp. 249-261.
- [14] Csapó Benő, Molnár Gyöngyvér, R. Tóth Krisztina: A papíralapú tesztekől a számítógépes adaptív tesztelésig, *Iskolakultúra* 2008/3–4, pp. 3-16.
- [15] Magyar Andrea: Számítógépes adaptív tesztelés, *Iskolakultúra* 2012/5 pp. 52-60.
- [16] Rean Griffith, Ritika Virmani, Gail Kaiser: The Role of Reliability, Availability and Serviceability (RAS) Models in the Design and Evaluation of Self-Healing Systems. In *International Conference on Self-Organization and Autonomous Systems (SOAS) in Computing and Communications*, 2007.
- [17] Kenny C. Gross and Wendy Lu: Early Detection of Signal and Process Anomalies in Enterprise Computing Systems, *Proceedings of the 2002 International Conference on Machine Learning and Applications - ICMLA 2002, June 24-27, 2002, Las Vegas, Nevada, USA.*